

1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ 을 풀면?

- ① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2
- ② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1
- ③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2
- ④ $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ (중근)
- ⑤ $x = -1, \frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

-1		2	-1	-6	-1	2	
		-2	3	3	-2		
		2	-3	-3	2	0	
2			4	2	-2		
		2	1	-1		0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은
 $(x+1)(x-2)(2x^2+x-1) = 0$
 $(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$
 $\therefore x = -1, \frac{1}{2}, 2$

2. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

3. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

4. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 으로 놓으면
 $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ 이므로, 조립제법에 의하면

1		1	-2	-5	6
			1	-1	-6
		1	-1	-6	0

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

5. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

- ① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$
- ② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$
- ③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$
- ④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$
- ⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$x(x+6) = x^2 + 6x$
 $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$
 $x^2 + 6x = X$ 로 놓으면
 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$
 $X(X+8) + 15 = 0,$
 $X^2 + 8X + 15 = 0$
 $(X+3)(X+5) = 0$
 $\therefore X = -3, X = -5$
ⓐ : $X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$
 $x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$
ⓑ : $X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$
 $(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$

6. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t(t - 2) - 3 = 0,$
 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

7. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 에서
 $x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $x^2 = 3$ 일 때, $x = \pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2 = -1$ 일 때, $x = \pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

8. x 에 관한 삼차방정식 $2x^3 + ax^2 - bx + 3 = 0$ 의 한 근이 1이고, $a + b + 1 = 0$ 일 때, 나머지 근을 모두 구하면?

① -3

② $-1, 2$

③ $-1, 3$

④ $-1, \frac{3}{2}$

⑤ $-\frac{1}{2}, 3$

해설

한 근이 1이므로 주어진 식에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2 + a - b + 3 = 0, a - b = -5$$

주어진 조건인 $a + b + 1 = 0$ 과 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(2x^2 - x - 3) = 0$$

$$(x - 1)(2x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, \frac{3}{2}, -1$$

9. 삼차방정식 $(x+2)(x^2+2x-a+2)=0$ 의 실근이 -2 뿐일 때, 실수 a 값의 범위를 구하면?

① $a < -3$

② $a < 1$

③ $a > -1$

④ $a > 2$

⑤ $a > 3$

해설

실근이 -2 뿐이므로 $x^2+2x-a+2=0$ 은 허근을 갖는다.

$$D = 2^2 - 4 \times 1 \times (-a+2)$$

$$= 4a - 4 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

10. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ 의 값은?

- ① $-p$ ② p ③ 0 ④ 3 ⑤ -3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} + \frac{-\gamma}{\gamma} = -3$ 이 된다.

11. 복소수 $a \pm bi$ ($b \neq 0, i = \sqrt{-1}$)가 삼차방정식 $x^3 + px + q = 0$ 의 허근일 때, 다음 중 p 를 a 와 b 로 옳게 나타낸 것은? (단, a, b, p, q 는 실수)

- ① $a^2 + b^2$
- ② $a^2 - 2b^2$
- ③ $b^2 - a^2$
- ④ $b^2 - 2a^2$
- ⑤ $b^2 - 3a^2$

해설

$x^3 + px + q = 0$ 의 세 근을 $a + bi, a - bi, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 의하여

$(a + bi) + (a - bi) + \alpha = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{\tiny \Gamma}$

$(a + bi)(a - bi) + \alpha(a + bi) + \alpha(a - bi) = p \quad \cdots \cdots \textcircled{\tiny \Delta}$

$\alpha(a + bi)(a - bi) = -q \quad \cdots \cdots \textcircled{\tiny \Xi}$

$\textcircled{\tiny \Gamma}$ 에서 $\alpha = -2a$

$\textcircled{\tiny \Delta}$ 에서 대입해 정리하면 $p = b^2 - 3a^2$

12. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 틀린 것은?

- ① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
- ② $\omega^3 = 1$
- ③ 1의 세제곱근은 1, ω , ω^2 으로 나타낼 수 있다.
- ④ $\omega^2 = \bar{\omega}$ (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)
- ⑤ $\omega = -\omega^2$

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow$
 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$
 $\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1 \dots \textcircled{1}, \textcircled{2}$
 $x = 1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 를 ω 라 하면 $\dots \textcircled{3}$
 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \bar{\omega} \dots \textcircled{4}$
 $\omega = -1 - \omega^2 \dots \textcircled{5}$ (거짓)

13. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

② $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

③ $(1 + \omega^2)^2 = \omega$

④ $(1 + \omega)^{10} = \omega^2$

⑤ $\omega^3 = 1$

해설

$$x^3 = 1$$

$$(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

ω 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이다.

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①식을 ω 로 나누면

$$\omega + \frac{1}{\omega} = -1 (\textcircled{\times})$$

$$\textcircled{3} \quad (1 + \omega^2)^2 = (-\omega)^2 = \omega^2 (\textcircled{\times})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad (1 + \omega)^{10} &= (-\omega^2)^{10} \\ &= \omega^{20} \\ &= (\omega^3)^6 \omega^2 \\ &= \omega^2 \quad (\textcircled{\times}) \end{aligned}$$

14. 어떤 정육면체의 밑면의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

15. 사차방정식 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 의 서로 다른 실근은 모두 몇 개인가?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 &\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0 \\ \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = -1 \end{aligned}$$

16. 사차방정식 $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 근 중에서 제일 큰 근을 α , 제일 작은 근을 β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값은?

① $\sqrt{5}$

② $\frac{\sqrt{5}}{2}$

③ $1 - \sqrt{5}$

④ $2 - \sqrt{5}$

⑤ $3 - \sqrt{5}$

해설

양근을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 라 하면

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = 2, 3$$

i) $t = 2$ 일 때

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore x = 1$$

ii) $t = 3$ 일 때

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

17. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

18. 삼차방정식 $x^3 + (p-4)x - 2p = 0$ 의 중근을 α , 다른 한 근을 β 라 할 때 $\alpha + \beta + p$ 의 값을 구하면?

- ① -10 또는 -2 ② -10 또는 -1 ③ -10 또는 2
④ -10 또는 4 ⑤ -10 또는 5

해설

$f(x) = x^3 + (p-4)x - 2p$ 로 놓으면 $f(2) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + p) = 0$$

따라서 $x = 2$, $x^2 + 2x + p = 0$

그런데 중근을 가져야 하므로

i) $x = 2$ 가 $x^2 + 2x + p$ 의 근일 때

$$2^2 + 2 \times 2 + p = 0$$

$$\therefore p = -8, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 8) = (x-2)^2(x+4)$$

$$\therefore \alpha = 2, \beta = -4$$

따라서, $\alpha + \beta + p = 2 + (-4) + (-8) = -10$

ii) $x^2 + 2x + p = 0$ 이 중근을 가질 때

$$D/4 = 0 \text{이므로 } D/4 = 1 - p = 0$$

$$\therefore p = 1, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = (x-2)(x+1)^2$$

$$\therefore \alpha = -1, \beta = 2, p = 1$$

따라서, $\alpha + \beta + p = -1 + 2 + 1 = 2$

i) ii)로부터 $\alpha + \beta + p$ 의 값은 -10 또는 2이다.

19. 삼차방정식 $(x-1)(x^2-ax+2a)=0$ 이 중근을 가질 때, 실수 a 의 값을 모두 구하면?

① -1

② $0, 8$

③ $-1, 8$

④ $-1, 0, -8$

⑤ $-1, 0, 8$

해설

(i) $x=1$ 을 중근으로 가질 때

$x=1$ 을 $x^2-ax+2a=0$ 에 대입하면 $a=-1$

(ii) $x^2-ax+2a=0$ 이 중근을 가질 때

$D=a^2-8a=0$

$\therefore a=0$ 또는 8

(i), (ii)에 의하여 $a=-1, 0, 8$

20. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$ 를 만족할 때, k 의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4$, $\alpha\beta\gamma = -k$ 이므로
 $\alpha + \beta = 2 - \gamma$, $\beta + \gamma = 2 - \alpha$, $\gamma + \alpha = 2 - \beta$
주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$
 $\therefore 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$
 $\therefore 8 - 8 - 8 + k = -k$
 $\therefore k = 4$

21. $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의
세 근이 α, β, γ 이므로
 $\alpha + \beta + \gamma = -2,$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3,$
 $\alpha\beta\gamma = -1$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3,$
 $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 2,$
 $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
 $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \cdots \cdots$ ①
 $x = \frac{1}{X}$ 로 놓으면
 $\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0$
 $\therefore X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \cdots \cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ 이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.
 $\therefore$ 구하는 방정식은
 $X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0$ 에서
 $abc = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

22. 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x + 3) = 0$ 의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\frac{x^2}{x^3}\text{의 계수}\right)$ 이므로
 x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
 $f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3이므로
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + d$
 $f(2x + 3)$
 $= (2x + 3)^3 - 3 \cdot (2x + 3)^2 + b \cdot (2x + 3) + d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
 $8x^3 + 24x^2 + \dots \dots = 0$
 $\therefore$ 세 근의 합 $= -3$

해설

$f(2x + 3) = 0$ 의 세 근을
각각 p, q, r 이라 하면,
 $2p + 3 = \alpha \dots \textcircled{\text{㉠}}$
 $2q + 3 = \beta \dots \textcircled{\text{㉡}}$
 $2r + 3 = \gamma \dots \textcircled{\text{㉢}}$
 $\textcircled{\text{㉠}} + \textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}}$ 에서
 $2(p + q + r) + 9 = 3$
 $\therefore p + q + r = -3$

23. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$ 이 되게 하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \text{의 한 근 } \omega \\ \Rightarrow \omega^3 &= 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0 \\ f(n) &= 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n} \\ f(1) &= 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega \\ f(2) &= 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0 \end{aligned}$$

자연수 n 의 최솟값은 2

24. x 에 대한 방정식 $f(x) = x^3 + x^2 + (a^2 - 4a - 2)x + (2a^2 - 8a) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 a 의 값을 정할 때, 정수 a 의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$$f(x) = (x+2)(x^2 - x + a^2 - 4a) = 0$$

여기서, $x = -2$ 는 $x^2 - x + a^2 - 4a = 0$ 의 근이 될 수 없다.

$$(\because (-2)^2 - (-2) + a^2 - 4a = (a-2)^2 + 2 \neq 0)$$

따라서, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면,

$$x^2 - x + a^2 - 4a = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.}$$

$$\therefore D = 1 - 4(a^2 - 4a) > 0, 4a^2 - 16a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{4 - \sqrt{17}}{2} < a < \frac{4 + \sqrt{17}}{2}$$

따라서, a 의 정수값은 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

25. 세 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 6, x^3 + y^3 + z^3 = 8$ 을 만족할 때, $-x - y + z$ 의 값은?(단, $x \leq y \leq z$)

- ① 4
- ② 3
- ③ 2
- ④ 1
- ⑤ 0

해설

$x + y + z = 2 \cdots \textcircled{㉠}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 6 \cdots \textcircled{㉡}$
 $x^3 + y^3 + z^3 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $xy + yz + zx = -1 \cdots \textcircled{㉣}$
 $x^3 + y^3 + z^3 =$
 $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz = 8$
 $\therefore xyz = -2 \cdots \textcircled{㉤}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 이용하여
 x, y, z 를 세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
 $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0(t - 2)(t + 1)(t - 1) = 0,$
 $t = -1, 1, 2$
 $x \leq y \leq z$ 이므로 $x = -1, y = 1, z = 2$
 $\therefore -x - y + z = 2$