1. $\frac{x^3-x}{x^2-x}+\frac{x^4-1}{x^2-1}-\frac{x^2-2x-3}{x+1}\times\frac{x+2}{x^2-x-6}$ 을 계산하면?

① x^2+x+1　　② $\frac{x^2+1}{x-1}$　　③ $\frac{2x}{x^2-1}$

④ x^2-1　　⑤ $\frac{2x-1}{x^2-x}$

해설

$$\frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)}+\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$-\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}\times\frac{x+2}{(x-3)(x+2)}$$

$$=x+1+x^2+1-1=x^2+x+1$$

2. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1+x^4}$$

① $\dfrac{8x^4}{1-x^4}$ ② $\dfrac{8}{1-x^4}$ ③ $\dfrac{8x^4}{1-x^8}$

④ $\dfrac{8}{1-x^8}$ ⑤ $\dfrac{8x^4}{1+x^8}$

해설

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1+x^4}$$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1+x^4}$$

$$=\frac{4}{1-x^4}-\frac{4}{1+x^4}=\frac{8x^4}{1-x^8}$$

3. $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+4}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

② $\dfrac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

③ $\dfrac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

④ $\dfrac{2(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

⑤ $\dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\\ &\quad -\left(1+\frac{1}{x+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x+4}\right)\\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\\ &= \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}-\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}\\ &= \frac{(2x+5)(x^2+5x+6-x^2-5x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\\ &= \frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

4. $x=1$일 때,

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$$ 의 값을 구하면?

① $\frac{8}{11}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{12}{11}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

해설

이항분리 이용

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x+3)}+\frac{3}{(x+3)(x+6)}+\frac{4}{(x+6)(x+10)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

$$+\frac{3}{3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{4}{4}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+10}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}$$

$x=1$ 대입하면 $\frac{1}{1}-\frac{1}{1+10}=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

5. 다음의 식을 간단히 하면?

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}$$

① 5 ② 10 ③ 0 ④ -10 ⑤ -5

해설

준식을 유리화하면

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{121}}{2}=\frac{11-1}{2}=5$$

6. 다음 중 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$ 을 간단히 한 것은?

① $\frac{2}{13}$ ② $\frac{4}{13}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{23}{30}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

해설

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$
$$=\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{5}{14}$$

7. $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=5$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=1-\frac{x-1}{x-1-x}$$

$$=1+x-1=x$$

$\therefore x=5$

8. $a+b=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{c+a}{3}$ 일 때, $\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ 의 값은? (단, $a^2+b^2+c^2\neq 0$)

① $\dfrac{5}{6}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{5}$ ④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 3

해설

$a+b=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{c+a}{3}=k$라 두면

$a+b=k,\ b+c=2k,\ c+a=3k$

$a+b+c=3k$

$a=k,\ b=0,\ c=2k$

$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{2k^2}{5k^2}=\dfrac{2}{5}$

9. 무리식 $\sqrt{2x+5}+\sqrt{15-3x}$가 실수값을 갖도록 하는 정수 x의 개수는?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$2x+5 \geq 0,\ 2x \geq -5 \quad \therefore x \geq -2.5$

$15-3x \geq 0,\ 15 \geq 3x \quad \therefore 5 \geq x$

$\therefore -2.5 \leq x \leq 5$

$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 총 8개

10. 분수식 $\dfrac{(x+3)\sqrt{8+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$ 이 실수가 되기 위한 정수 x값들의 총합은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$8+2x-x^2 \geq 0$ 에서 $x^2-2x-8 \leq 0$

$(x+2)(x-4) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 4$

(i) 분모 $=(x-1)(x-2) \neq 0$ 에서 $x \neq 1,\ 2$

(ii) 분자 $= x+3=0$ 에서 $x=-3$

$\therefore$ 정수 $x=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4$ 이고

(합)$=-3-2-1+0+3+4=1$

11. $-1 < a < 3$ 일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\sqrt{a^2+2a+1}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{a^2-6a+9}$$

① a ② $a-2$ ③ 4

④ $3a+2$ ⑤ $a+2$

해설

$$\sqrt{(a+1)^2}+(\sqrt{a-2})^2+\sqrt{(a-3)^2}$$
$$=|a+1|+(a-2)+|a-3|$$
$$=(a+1)+(a-2)-(a-3)$$
$$=a+1-2+3=a+2$$

12. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$일 때, $\dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{1}{f(2)} + \cdots + \dfrac{1}{f(99)}$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

13. 함수 $y = \dfrac{k}{x-1} + 3 \ (k \neq 0)$ 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.

ㄴ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

ㄷ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

점근선은 $x = 1, y = 3$ 이다.

ㄱ, ㄷ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.

$k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

ㄴ : $k < 0$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.

$\therefore$ ㄴ, ㄷ 이 참.

14. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{-x+b}$ 의 그래프의 점근선이 $x=2, y=-1$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=\dfrac{ax+1}{-(x-b)}$ 의 점근선이 $x=2, y=-1$ 이므로

$b=2$ 이고

$y=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{-(x-2)}=\dfrac{2a+1}{-(x-2)}-a$ 에서

$-a=-1$ 이므로

$\therefore a+b=1+2=3$

15. 점 (2, 3)을 지나고, $x=1$, $y=2$를 점근선으로 하는 분수함수가 있다. 이 함수의 그래프를 적당히 이동했을 때, 겹쳐질 수 없는 것은?

① $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ ② $y=\dfrac{2x+5}{x-2}$ ③ $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$
④ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}$ ⑤ $y=\dfrac{x+2}{x+1}$

해설

점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$ 이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2\ (k\neq 0)$ 로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 (2, 3) 을 지나므로

$3=k+2 \therefore\ k=1$

따라서, 보기의 분수함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ 의

꼴로 고쳤을 때, k 의 값이 1 인 그래프는

평행이동으로 겹쳐진다.

① $y=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$

② $y=\dfrac{2x+5}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+9}{x-2}=\dfrac{9}{x-2}+2$

③ $y=\dfrac{2x-5}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+1}{x-3}=\dfrac{1}{x-3}+2$

④ $y=\dfrac{-2x-1}{x+1}=\dfrac{-2(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}-2$

⑤ $y=\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}+1$

따라서, 겹쳐질 수 없는 것은 ②번이다.

16. 다음 중 평행이동에 의하여 그 그래프를 $y=\frac{1}{x}$과 겹칠 수 없는 것은?

① $y=\frac{-x}{x+1}$ ② $y=\frac{x}{x-1}$ ③ $y=\frac{2x+1}{2x-1}$

④ $y=\frac{x-1}{x}$ ⑤ $y=\frac{2x-5}{x-3}$

해설

① $y=\frac{-(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-1$

② $y=\frac{(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}+1$

③ $y=\frac{(2x-1)+2}{2x-1}=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+1$

④ $y=\frac{x-1}{x}=-\frac{1}{x}+1$

⑤ $y=\frac{2x-5}{x-3}=\frac{2(x-3)+1}{x-3}=\frac{1}{x-3}+2$

따라서 $y=\frac{1}{x-p}+q$의 꼴이 아닌 것은 ④이다.

17. 함수 $y = \dfrac{2x-7}{x-2}$ 의 그래프와 함수 $y = \dfrac{k}{x}$ 의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다. 이 때, 상수 k의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 2

해설

$$y = \frac{2x-7}{x-2} = \frac{2(x-2)-3}{x-2} = -\frac{3}{x-2} + 2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \dfrac{-3}{x}$ 의

그래프를 x축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore\ k = -3$

18. 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a의 값은? (단, $x\neq -\dfrac{3}{2}$)

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

$y=\dfrac{ax}{2x+3}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{-\frac{3}{2}a}{2x+3}$ 이므로 치역은

$y\neq\dfrac{a}{2}$ 인 실수이다.

$\therefore \dfrac{a}{2}=-\dfrac{3}{2}$, 곧 $a=-3$

19. 분수함수 $y=\dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x=-1$ 이고 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① $\{y \mid y < 0$ 또는 $y > 2\}$

② $\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$

③ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$

④ $\{y \mid y < 1$ 또는 $1 < y \le 2\}$

⑤ $\{y \mid y < 1$ 또는 $y \ge 2\}$

해설

분수함수 $y=\dfrac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x=-1$ 이므로

$x=-\dfrac{1}{a}=-1$

$\therefore\ a=1$

따라서, 주어진 분수함수는 $y=\dfrac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$ 를 지나

므로

$2=\dfrac{1+b}{1+1}\quad \therefore b=3$

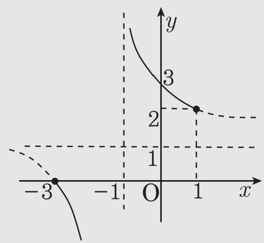
$\therefore\ y=\dfrac{x+3}{x+1}$

따라서 $-3 \le x < -1$ 또는 $-1 < x \le 1$ 에서

$y=\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{2}{x+1}+1$ 의 그래프는

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$\{y \mid y \le 0$ 또는 $y \ge 2\}$



20. $x^2-x-6\geq 0$ 일 때, 함수 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-x-6\geq 0$ 에서

$(x+2)(x-3)\geq 0$

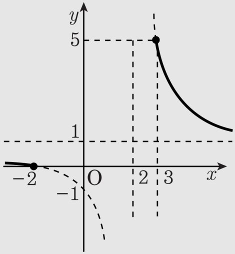
$\therefore\ x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$

$y=\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{(x-2)+4}{x-2}$

$=\dfrac{4}{x-2}+1$

즉, $x\leq -2$ 또는 $x\geq 3$ 에서

$y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 의 그래프는 다음 그림과



같으므로 $x=-2$ 일 때, 최솟값 0,

$x=3$ 일 때, 최댓값 5

따라서, 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

21. $2 \le x \le 3$ 에서 부등식 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1}+1$$

따라서, 분수함수 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

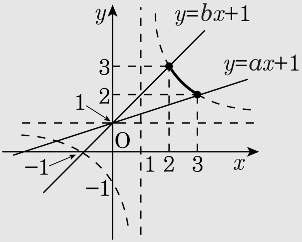
두 직선 $y = ax+1$, $y = bx+1$ 은 a, b 의 값에

관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \le x \le 3$ 에서 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le$

$bx+1$ 이 항상 성립하려면 다음

그림에서 $a \le \dfrac{1}{3}$, $b \ge 1$



따라서, a 의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b 의

최솟값은 1 이므로 그 합은 $\dfrac{4}{3}$

22. 함수 $y = \dfrac{3x-5}{x-1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, ab 의 값들을 모두 구하면?

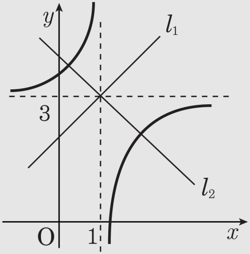
① 2, -4　　② -2, 4　　③ 2, 4

④ -2, -4　　⑤ 3, 5

해설

$$y = \frac{3x-5}{x-1} = \frac{3(x-1)-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1} + 3$$

따라서 위의 그림과 같이 직선 l_1, l_2 에 대하여



대칭이다.

l_1 : $y-3 = 1 \cdot (x-1)$ $\therefore$ $y = x+2$

l_2 : $y-3 = -1 \cdot (x-1)$ $\therefore$ $y = -x+4$

따라서 $ab = 2$ 또는 $ab = -4$

23. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점$(0, 2)$를 지나고 $x=1, y=2$를 점근선으로 할 때 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가

$x=1,\ y=2$ 를 점근선으로 하므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$ 로 놓을 수 있다.

이것이 점 $(0, 2)$를 지나므로

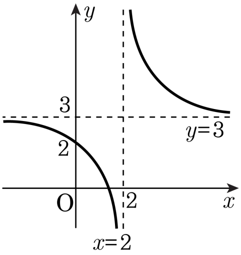
$2=-k+2 \quad \therefore\ k=0$

따라서 $y=\dfrac{2(x-1)}{x-1}=\dfrac{2x-2}{x-1}$ 에서

$a=2,\ b=-2,\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=2-2-1=-1$

24. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2,\ y=3$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?



① -6　② -4　③ -3　④ 2　⑤ 7

해설

점근선이 $x=2, y=3$ 이므로 $a=3, c=-2$

점$(0,2)$를 지나므로 $\dfrac{b}{c}=2$

$\therefore\ b=-4$

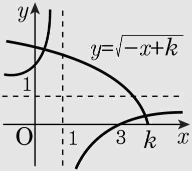
$\therefore a+b+c=-3$

25. 함수 $y=\dfrac{x-3}{x-1}$ 과 $y=\sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 k 의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y=\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{-2}{x-1}+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

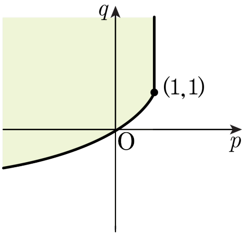


따라서, 주어진 분수함수의 그래프와 함수 $y=\sqrt{-x+k}$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

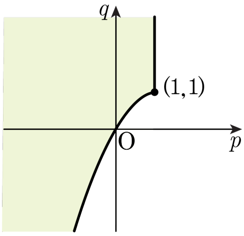
$k\ge 3$ 이어야 하므로 k 의 최솟값은 3이다.

26. 좌표평면에서 무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프가 도형 $A = \{(x, y) \mid x = 1$이고$y \geq 1\}$과 한 점에서 만난다고 한다. 이 때, 점 (p, q)가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 포함)

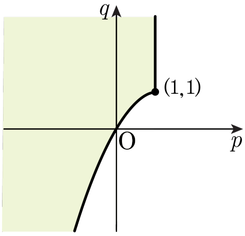
①



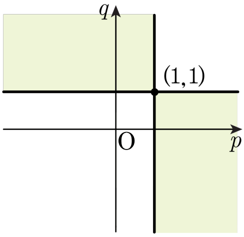
②



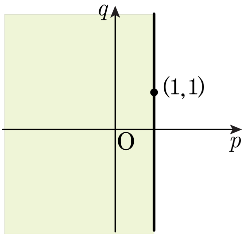
③



④



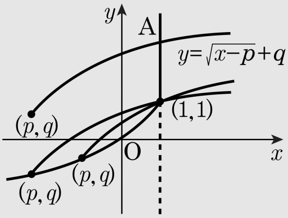
⑤



해설

무리함수 $y = \sqrt{x-p}+q$ 의 그래프는 점 (p, q) 에서 시작하여 오른쪽 위로 증가하는 곡선이다.

곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$ 가 반드시 반직선 A와 만나기 위해서는 점 (p, q)가 직선 $x = 1$의 왼쪽에 놓여야 한다.



$\therefore\ p \leq 1 \cdots$ ㉠

또한, 곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 반직선 A와 한 점에서 만나는 경우 중 가장 아래쪽에 놓일 때는

곡선 $y = \sqrt{x-p}+q$가 점 $(1, 1)$을 지날 때이다.

점 $(1, 1)$을 지나는 경우는 $1 = \sqrt{1-p}+q$에서 $q = 1-\sqrt{1-p}$

$\therefore\ q \geq 1-\sqrt{1-p} \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 구하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

27. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ 일 때 $f^{1999}(0)$ 의 값은?(단 $f^2(x) = (f \circ f)(x), \cdots\cdots, f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$)

① $\dfrac{3}{2}$ ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(0) = 3,$

$f^2(0) = \dfrac{6-3}{3-1} = \dfrac{3}{2}, f^3(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$

$\therefore \ f^{3n}(0) = 0$

$1999 = 666 \times 3 + 1$

$\therefore f^{1999}(0) = f(0) = 3$

28. 함수 $f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에 대하여 $f_{n+1} = f_1 \circ f_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 이라 할 때, $f_{100}(1)$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{-x-1}$ 에서 $f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$f_2(1) = (f_1 \circ f_1)(1) = f_1\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

$= \dfrac{-\dfrac{10}{2}+3}{\dfrac{5}{2}-1} = -\dfrac{4}{3}$

$f_3(1) = (f_1 \circ f_2)(1) = f_1\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{-\dfrac{8}{3}+3}{\dfrac{4}{3}-1} = 1$

$f_4(1) = (f_1 \circ f_3)(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore f_4 = f_1,\ f_5 = f_2,\ f_6 = f_3, \cdots$

$\therefore f_{3n+1} = f_1,\ f_{3n+2} = f_2,\ f_{3n} = f_3$

$100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로

$\therefore\ f_{100}(1) = f_1(1) = -\dfrac{5}{2}$

29. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$를 $f(x)$로 나타내면?

① $\dfrac{2f(x)}{2f(x)-1}$　② $\dfrac{2f(x)}{2f(x)+1}$　③ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}$

④ $\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}$　⑤ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$2x=\frac{2f(x)}{f(x)-1}$$

$$f(2x)=f\left(\frac{2f(x)}{f(x)-1}\right)=\frac{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$=\frac{2f(x)}{2f(x)-f(x)+1}=\frac{2f(x)}{f(x)+1}$$

30. 유리함수 $f(x) = \dfrac{kx}{x+3}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 실수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x) = \dfrac{kx}{x+3}$가 직선 $y=x$에 대해 대칭이므로

$f(x) = f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{-3x}{x-k}$

$$\frac{kx}{x+3} = \frac{-3x}{x-k}$$

$\therefore\ k = -3$

31. 함수 $y = -\frac{2}{x} + 2$의 그래프와 직선 $y = 2x + k$가 서로 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 3 개　　② 4 개　　③ 5 개　　④ 6 개　　⑤ 7 개

해설

$-\frac{2}{x} + 2 = 2x + k$ 에서 $-2 + 2x = 2x^2 + kx$

$2x^2 + (k-2)x + 2 = 0$이 이차방정식의 판별식을

D라 하면 $D = (k-2)^2 - 16 < 0$에서

$k^2 - 4k - 12 < 0,\ (k+2)(k-6) < 0$

$\therefore\ -2 < k < 6$

따라서 이를 만족하는 정수 k의 값은

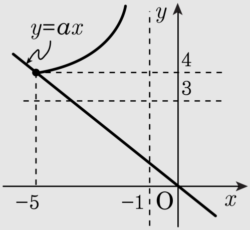
$-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

32. $-5 \le x < -1$에서 $ax \le \dfrac{3x-1}{x+1}$이 항상 성립하기 위한 실수 a의 최솟값은?

① -2 ② $-\dfrac{7}{5}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{4}{5}$ ⑤ $-\dfrac{2}{5}$

해설

$-5 \le x < -1$에서 직선 $y = ax$가 함수 $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있어야 한다.



$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{3(x+1)-4}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3$$

$y = \dfrac{3x-1}{x+1}$의 그래프가 다음 그림과 같고,

$x = -5$일 때 $y = 4$이므로 점 $(-5,\ 4)$를 지난다.

직선 $y = ax$가 점$(-5,\ 4)$를 지날 때,

$4 = -5a$에서 $a = -\dfrac{4}{5}$이다.

따라서 $-5 \le x < -1$에서 $ax \le \dfrac{3x-1}{x+1}$이 성립하려면

$a \ge -\dfrac{4}{5}$이어야 하므로

a의 최솟값은 $-\dfrac{4}{5}$이다.

33. 두 집합 $A = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ y = \dfrac{2x+4}{x+1},\ 0 \le x \le 1\right\}$, $B = \{(x,\ y) \mid y = m(x+2)\}$ 에 대하여 $A \cap B \neq \varnothing$ 이 성립하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $-1 \le m < 2$ ② $m \le 0, m \ge 2$ ③ $1 \le m \le 2$

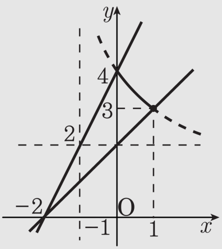
④ $-1 \le m \le 1$ ⑤ $m < 1, m \ge 3$

해설

$y = \dfrac{2x+4}{x+1} = \dfrac{2(x+1)+2}{x+1}$

$= \dfrac{2}{x+1} + 2$ 이므로

집합 A 가 나타내는 영역은 그림과 같다.



$y = m(x+2)$ 에서 집합 B 는

점 $(-2,\ 0)$ 을 지나는 직선들의 모임이다.

이때, $A \cap B \neq \varnothing$ 이려면

두 집합이 나타내는 그래프가 만나야 하므로

직선 $y = m(x+2)$ 가 점 $(1,\ 3)$ 을 지날 때와

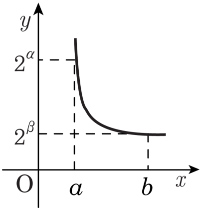
점 $(0,\ 4)$ 를 지날 때 사이에 존재해야 한다.

따라서, 구하는 m 의 범위는

$\dfrac{3-0}{1-(-2)} \le m \le \dfrac{4-0}{0-(-2)}$

$\therefore\ 1 \le m \le 2$

34. 함수 $y = f(x) = \dfrac{1}{2x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $ab = 16$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?



① -6　② -5　③ -4
④ -3　⑤ -2

해설

$f(x) = \dfrac{1}{2x}$ 의 그래프에서

$f(a) = \dfrac{1}{2a} = 2^\alpha$, $f(b) = \dfrac{1}{2b} = 2^\beta$

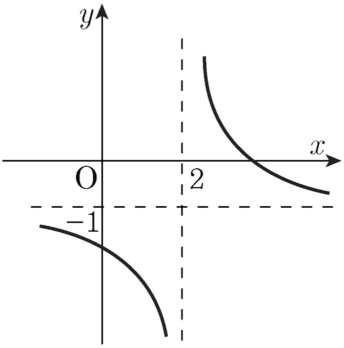
$f(a)$ 와 $f(b)$를 곱하면

$f(a) \times f(b) = \dfrac{1}{2a} \times \dfrac{1}{2b} = 2^{\alpha+\beta}$

$\therefore\ 2^{\alpha+\beta} = \dfrac{1}{4ab} = \dfrac{1}{4 \times 16} = \dfrac{1}{2^6} = 2^{-6}$

$\therefore\ \alpha + \beta = -6$

35. 분수함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y=\sqrt{cx+a}+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제1사분면　② 제2사분면　③ 제3사분면
④ 제4사분면　⑤ 제1, 2사분면

해설

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 점근선은 $x=-a,\ y=c$

그림에서 $-a>0,\ c<0$이고, $b>0$

$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0 \cdots$ ㉠

한편 $y=\sqrt{cx+a}+b=\sqrt{c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)}+b$이므로

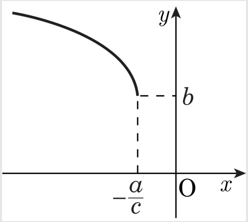
$c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)\geq 0$

이때 $c<0$이므로 $x\leq -\dfrac{a}{c}$

㉠에서 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로 $x<0$

또 $y=\sqrt{cx+a}+b\geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

36. $1 \leq x \leq a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

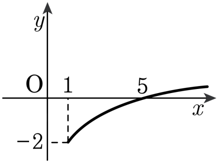
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \leq x \leq a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x=1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

37. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1 ② −1 ③ 2

④ −2 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1, -2)$에서부터 시작하므로

$-\frac{b}{a} = 1,\ c = -2$

$\therefore -b = a\ ,\ c = -2$

$y = \sqrt{ax-a}-2$가 점$(5, 0)$을 지나므로

$0 = \sqrt{5a-a}-2,\ 2 = \sqrt{4a}$

양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$이므로

$a+b+c = 1-1-2 = -2$

38. 무리함수 $y = -\sqrt{1-x} + 2$의 역함수는?

① $y = (x-2)^2 + 1(x \leq 2)$　② $y = (x-2)^2 - 1(x \leq 2)$

③ $y = -(x-2)^2 + 1(x \leq 2)$　④ $y = -(x-2)^2 - 1(x \leq 2)$

⑤ $y = -(x+2)^2 + 1(x \leq 2)$

해설

$y = -\sqrt{1-x} + 2$에서 $1 - x \geq 0$이므로 $x \leq 1$

$y - 2 = -\sqrt{1-x} \leq 0$이므로 $y \leq 2$

$1 - x = (y-2)^2,\ x = -(y-2)^2 + 1$

$x,\ y$를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore y = -(x-2)^2 + 1(x \leq 2)$

39. $f(x) = \sqrt{x-1}+1$과 그 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(x)$와 $f(x), g(x)$의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?

① $g(x) = x^2 - 2x + 2,\ \sqrt{3}$

② $g(x) = x^2 - 2x + 2,\ \sqrt{2}$

③ $g(x) = x^2 - 2x + 1,\ \sqrt{2}$

④ $g(x) = x^2 - 2x + 1,\ \sqrt{3}$

⑤ $g(x) = x^2 - 2x + 1,\ \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1}+1$ 에 대하여

i) $y = \sqrt{x-1}+1$로 놓고 역함수를 구하면

$y-1 = \sqrt{x-1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 제곱하면

$(y-1)^2 = x-1,\ y^2-2y+1 = x-1,\ x = y^2-2y+2$

$\therefore\ g(x) = x^2-2x+2$

ii) $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 교점은

$f(x)$와 $y=x$ 또는 $g(x)$ 와 $y=x$의 교점을

구하면 된다.

$g(x) = x$에서 $x^2-2x+2 = x$

$x^2-3x+2=0$, $(x-2)(x-1)=0$

그러므로 $x=2$ *or* $x=1$에서 $y=2$ *or* $y=1$

따라서 두 점$(1,\ 1), (2,\ 2)$사이의 거리는

$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$

40. 두 함수 $y = \sqrt{x+3}$과 $y = x+k$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 갖도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le k < \dfrac{13}{4}$　② $2 \le k < \dfrac{13}{4}$　③ $3 \le k \le \dfrac{13}{4}$

④ $3 < k < \dfrac{13}{4}$　⑤ $3 \le k < \dfrac{13}{4}$

해설

직선과 포물선이 접하려면 $\sqrt{x+3} = x+k$

$\therefore\ x+3 = (x+k)^2$

$x^2 + (2k-1)x + (k^2-3) = 0$ 에서

$D = (2k-1)^2 - 4(k^2-3) = 0$

$4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 12 = 0$

$\therefore\ -4k + 13 = 0$

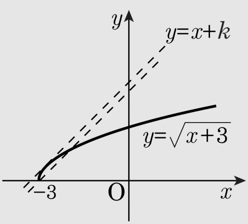
$\therefore\ k = \dfrac{13}{4}$

또, 직선 $y = x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

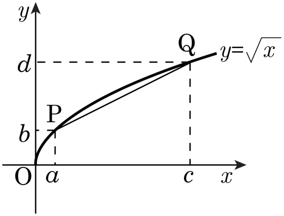
$0 = -3 + k$　$\therefore\ k = 3$

따라서 서로 다른 두 개의 교점을 가질 때의 k 의 값의 범위는

$3 \le k < \dfrac{13}{4}$



41. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b), \mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1

해설

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b),\ \mathrm{Q}(c,\ d)$ 는

함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$

$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{d-b}{c-a} = \frac{d-b}{d^2-b^2} = \frac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \frac{1}{d+b}$$ 이고

$\dfrac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d = 2$ 이므로

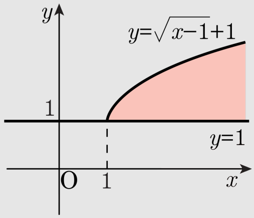
$(\therefore$ 직선 PQ 의 기울기$) = \dfrac{1}{2}$

42. 실수 x, y 가 $1 \le y \le \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시킬 때, $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값을 a 과 최솟값을 b 라 할 때, $2a-b$ 의 값을 구하면?

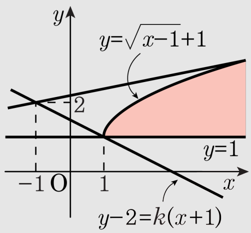
① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$1 \le y \le \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시키는 영역은
다음 그림의 색칠된 부분(경계선 포함)과 같다.



$\dfrac{y-2}{x+1} = k$(k 는 상수) 로 놓으면
$y-2 = k(x+1) \cdots$ ㉠ 이므로
㉠은 k 의 값에 관계없이 점$(-1,\ 2)$ 를 지난다.
(i) ㉠이 함수
$y = \sqrt{x-1}+1$ 의 그래프에 접할 때,
$kx+k+2 = \sqrt{x-1}+1$ 에서 $kx+k+1 = \sqrt{x-1}$



양변을 제곱하여 정리하면
$k^2x^2 + (2k^2+2k-1)x + k^2+2k+2 = 0$,
$D = 0$ 이므로 $8k^2+4k-1 = 0$

$\therefore k = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} (\because k > 0)$

(ii) ㉠이 점$(1,\ 1)$ 을 지날 때, $-1 = k \cdot 2$

$\therefore k = -\dfrac{1}{2}$

(i), (ii) 에서 $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값 $a = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$,

최솟값 $b = -\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\therefore 2a-b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

43. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서

$1-(x+1)^2 \ge 0,\ x^2+2x \le 0$

$\therefore -2 \le x \le 0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x \mid -2 \le x \le 0\}$, 치역은 $\{y \mid y \ge 0\}$

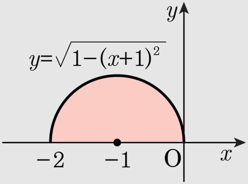
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을

제곱하여 정리하면 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 이므로

함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

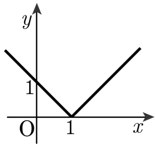
따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$

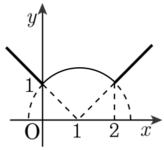


44. 함수 $y = \sqrt{1+|2x-x^2|}$ 의 그래프는 ?

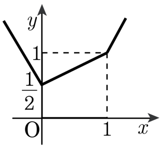
①



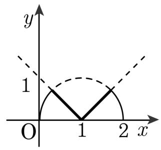
②



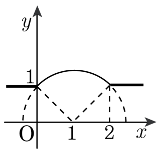
③



④



⑤



해설

(i) $2x - x^2 \geq 0$

즉, $x^2 - 2x \leq 0$ 일 때,

$0 \leq x \leq 2$

이 때, $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}$ 의 양변을 제곱하면,

$y^2 = 1 + 2x - x^2 \ (y \geq 0)$

$(x-1)^2 + y^2 = 2 \ (y \geq 0) \cdots\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $2x - x^2 < 0$ 즉, $x^2 - 2x > 0$ 일 때,

$x < 0$ 또는 $x > 2$

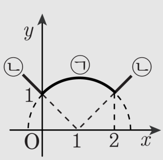
이 때,

$y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$

$= \sqrt{(x-1)^2}$

$= |x-1| \cdots\cdots\cdots$ ㉡

(i), (ii) 에서 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



45. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab >\ 0$ 이면 제 3사분면

② $ab <\ 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.

㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0$)이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.

㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.

㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.

㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

46. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a+p+q$ 의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

정의역은 $\left\{x \mid a(x-p) \geq 0\right\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0,\ p = 3$

치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$이므로 $q = 4$

$\therefore\ f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$

이때, $f(1) = 6$이므로

$\sqrt{-2a} + 4 = 6,\ \sqrt{-2a} = 2\ ,\ -2a = 4$

$\therefore\ a = -2$

$\therefore\ a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$

47. 분수함수 $y = \dfrac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$ 일 때, 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, a, b 는 상수)

① $\{x \mid x \leq -3\}$ ② $\left\{x \mid x \leq -\dfrac{2}{3}\right\}$ ③ $\left\{x \mid x \geq -\dfrac{2}{3}\right\}$

④ $\left\{x \mid x \geq \dfrac{2}{3}\right\}$ ⑤ $\{x \mid x \geq 3\}$

해설

$y = \dfrac{-ab-1}{x+b} + a$ 이므로

점근선은 $x = -b$, $y = a \therefore a = 3, b = 2$

$y = \sqrt{3x+2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \geq -\dfrac{2}{3}\right\}$ 이다.

48. 무리함수 $y = \sqrt{a-x} - 1$의 그래프가 원점을 지나고 정의역이 $\{x \mid x \le \alpha\}$, 치역이 $\{y \mid y \ge \beta\}$일 때, $a + \alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

주어진 무리함수의 그래프가
점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로
$0 = \sqrt{a-1}$
$\therefore a = 1$
즉, 주어진 무리함수는 $y = \sqrt{1-x} - 1$ 이고
$1 - x \ge 0$ 에서 $x \le 1$ 이므로
정의역은 $\{x \mid x \le 1\}$
$\therefore \alpha = 1$
또, $y = \sqrt{1-x} - 1$ 에서
$y + 1 = \sqrt{1-x} - 1$이므로 $y + 1 \ge 0$
치역은 $\{y \mid y \ge -1\}$
$\therefore \beta = -1$
$\therefore a + \alpha + \beta = 1$

49. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$의 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$에서
$x \geq 0,\ 8-x \geq 0$이므로
정의역은 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$, $f(x) \geq 0$이므로
$\{f(x)\}^2$이 최대일 때 $f(x)$도 최대이고
$\{f(x)\}^2 = x + 2\sqrt{8x-x^2} + 8 - x = 8 + 2\sqrt{8x-x^2}$
이때, $y = 8x - x^2 = -(x-4)^2 + 16$이므로
$0 \leq x \leq 8$에서 $x = 4$일 때 최댓값 16을 가진다.
따라서 $x = 4$일 때 $\{f(x)\}^2$은
최댓값 16을 가지므로
$f(x)$의 최댓값은 4이다.