

1. 이차함수 $y = \frac{2}{3}x^2 - 4ax - 6a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 7 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동하였더니 최솟값이 -3 이 되었다. 이 때, 상수 a 의 값은? (단, $a < 0$)

① 0

② 1

③ -1

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}y &= \frac{2}{3}x^2 - 4ax - 6a \\&= \frac{2}{3}(x^2 - 6ax + 9a^2 - 9a^2) - 6a \\&= \frac{2}{3}(x - 3a)^2 - 6a^2 - 6a\end{aligned}$$

$y = \frac{2}{3}(x - 3a)^2 - 6a^2 - 6a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 7 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동한 식은

$$y = \frac{2}{3}(x - 3a - 7)^2 - 6a^2 - 6a - 3 \text{ 이다.}$$

최솟값이 -3 이므로

$$-6a^2 - 6a - 3 = -3, 6a(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ or } 0$$

$$\therefore a = -1 (\because a < 0)$$

2. 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x = 2$ 에서 최솟값이 4 이므로
꼭짓점의 좌표가 (2, 4) 이다.

$$y = (x - 2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

$$a = 4, b = 8$$

$$\therefore a + b = 12$$

3. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 는 한 점 $(-2, -5)$ 을 지나고, $x = m$ 일 때 최솟값 $2m$ 을 갖는다. m 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$y = x^2 + ax + b$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(m, 2m)$ 이므로
 $y = (x - m)^2 + 2m$ 에 $(-2, -5)$ 를 대입한다.

$$-5 = (-2 - m)^2 + 2m$$

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$(m + 3)^2 = 0$$

따라서 $m = -3$ 이다.

4. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$$

$$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$$

따라서 m 의 최댓값은 1이다.

5. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$$

$$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$$

따라서 m 의 최댓값은 2 이다.

6. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 2ax - 2a - 4 \\&= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{ 의 최솟값 : } m &= -\frac{a^2}{2} - 2a - 4 \\&= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2\end{aligned}$$

m 의 최댓값 : -2

7. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 4k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2kx + 4k \\ &= (x^2 + 2kx) + 4k \\ &= (x + k)^2 - k^2 + 4k \end{aligned}$$

최솟값 $m = -k^2 + 4k = -(k - 2)^2 + 4$

따라서 m 의 최댓값 4이다.

8. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24 - 2x)$ cm 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36) + 36 \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때,
부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24 - 2x = 12 \text{ cm}$ 이다.

9. 둘레의 길이가 20cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20 - 2a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a \\ &= -(a^2 - 10a + 25) + 25 \\ &= -(a - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$a = 5, b = 25$$

따라서 $a + b = 30$ 이다.

10. 과학 탐구 반 학생들이 물 로켓을 발사하는데 위로 똑바로 쏘아 올린 물 로켓의 t 초 후의 높이가 $(40t - 8t^2)$ m 이다. 이 때 물 로켓이 올라갈 수 있는 최대 높이는?

① 30m

② 35m

③ 40m

④ 45m

⑤ 50m

해설

높이를 h 라 하면

$$h = -8t^2 + 40t = -8 \left(t - \frac{5}{2} \right)^2 + 50$$

$\therefore 50\text{m}$

11. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, x 초 후의 축구공의 높이를 y m 라고 하면 $y = -x^2 + 6x$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 9 m

해설

$y = -x^2 + 6x$ 에서 $y = -(x - 3)^2 + 9$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 9m 이다.

12. 지면으로부터 15m 높이에서 초속 40m 로 쏘아 올린 모형 로켓의 x 초 후의 지면으로 부터의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x + 15$ 인 관계가 성립한다. 이 로켓이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 4초

▷ 정답: 95m

해설

$y = -5x^2 + 40x + 15$ 에서 $y = -5(x - 4)^2 + 95$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 95 를 갖는다.

13. 지면으로부터 초속 40m 로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 4초

▷ 정답: 80m

해설

$y = -5x^2 + 40x$ 에서 $y = -5(x - 4)^2 + 80$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 80을 갖는다.

14. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$ m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

- ① 5 초 후 ② 7 초 후 ③ 8 초 후
④ 10 초 후 ⑤ 알 수 없다.

해설

$$y = 50t - 5t^2$$

$$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t - 5)^2 + 125$$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.

15. 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ ($-3 \leq x \leq -1$) 의 최솟값이 0 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{19}{5}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (6+p)x + 4p + 12 \\ &= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4} \end{aligned}$$

- (1) $\frac{6+p}{2} < -3$, 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$$f(-3) = 7p + 39 = 0$$

$$\therefore p = -\frac{39}{7}$$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값은 존재하지 않는다.

- (2) $-3 \leq \frac{6+p}{2} \leq -1$, 즉, $-12 \leq p \leq -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$$

$$p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$(p+2)(p-6) = 0$$

$$\therefore p = -2 \text{ 또는 } 6$$

그런데 $-12 \leq p \leq -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값이 존재하지 않는다.

- (3) $\frac{6+p}{2} \geq -1$, 즉, $p \geq -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$$\therefore p = -\frac{19}{5}$$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.

16. 이차함수 $y = -2x^2 + 4mx + m - 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{7}{2}$

② -2

③ $-\frac{9}{8}$

④ 3

⑤ $\frac{10}{3}$

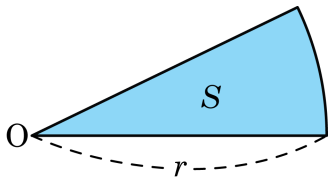
해설

$$y = -2x^2 + 4mx + m - 1 = -2(x - m)^2 + m - 1 + 2m^2$$

$$M = 2m^2 + m - 1 = 2\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

M 은 $m = -\frac{1}{4}$ 일 때 최솟값 $-\frac{9}{8}$ 를 갖는다.

17. 둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름의 길이가 r cm 일 때, 넓이를 S cm² 라고 한다. S 가 최대일 때, r 의 값은? (단, 반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}lr$ 임을 이용하여라.)



① 3

② 6

③ 7

④ 9

⑤ 10

해설

둘레의 길이가 12cm 인 부채꼴의 반지름을 r cm 이라 하면 호의 길이는 $(12 - 2r)$ cm 이다.

$$\begin{aligned} (\text{부채꼴의 넓이}) &= \frac{1}{2}r(12 - 2r) = -r^2 + 6r \\ &= -(r - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

따라서 $r = 3$ 일 때, 부채꼴의 최대의 넓이는 9 이다.