1. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $(f \circ f)(x)$ 의 값은 얼마인가?

$$f(x) = \begin{cases} x & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 3-x & (x\text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

① x ② $3-x$ ③ $x-3$ ④ 0 ⑤ 3

해설

(ⅰ) x가 유리수일 때, $f(x) = x$ 이므로,
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$
(ⅱ) x가 무리수일 때,
$f(x) = 3-x$ 로 무리수이므로,
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 - f(x) = 3-(3-x) = x$
(ⅰ), (ⅱ) 에 의하여 $(f \circ f)(x) = x$

2. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = x$$

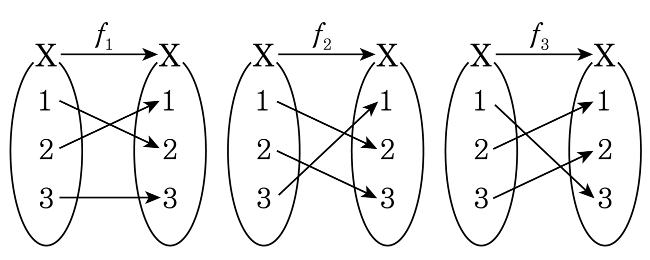
$\therefore\ x^3 = x,\ x^3 - x = 0,\ x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1 \ or\ 0\ or\ 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1\ or\ 0$

$\therefore\ -1 + 0 = -1$

3. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에서 X로의 일대일대응 f_1, f_2, f_3 가 다음과 같다. 이 때, 다음 중 $f_2 \circ f_2$ 와 같은 것은?

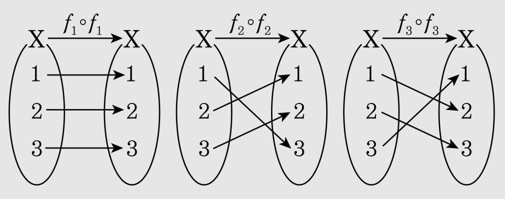


① f_1　　② f_2　　③ f_3

④ $f_1 \circ f_1$　　⑤ $f_3 \circ f_3$

해설

보기의 합성함수를 각각 구해보면



위 그림에서 $f_2 \circ f_2 = f_3$ 임을 알 수 있다.

4. 두 함수 $f(x)=3x-1,\ g(x)=4-3x$ 에 대하여 $h\circ f=g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 는?

① $h(x)=\dfrac{1}{3}(x+1)$　② $h(x)=3x-1$

③ $h(x)=x-3$　④ $h(x)=3-x$

⑤ $h(x)=x+3$

해설

$(h\circ f)(x)=4-3x$ 에서

$f(x)=t$ 라 하면 $t=3x-1,\ 3x=t+1$

$x=\dfrac{1}{3}(t+1)$ 을 대입하면

$h(t)=4-3\times\dfrac{1}{3}(t+1)=3-t$

$\therefore\ h(x)=3-x$

5. $f\left(x^2-3x\right)=4x^2-12x+9$ 일 때, $f(-2)$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2-3x=-2$ 에서 $x=1,\ 2$
i) $x=1$ 일 때, $f(-2)=4-12+9=1$
ii) $x=2$ 일 때, $f(-2)=16-24+9=1$
i), ii) 에서 $f(-2)=1$

6. 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f : R \to R$를 $f(x) = \begin{cases} \pi & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 으로 정의할 때, 합성함수 $f \circ f$의 치역은?

① $\{0\}$ ② $\{\pi\}$

③ $\{0,\ \pi\}$ ④ 유리수 전체의 집합

⑤ 실수 전체의 집합

해설

i) x 가 유리수이면 $f(x) = \pi$ 이고
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\pi) = 0$

ii) x 가 무리수이면 $f(x) = 0$ 이고
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(0) = \pi$

따라서, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은 $\{0,\ \pi\}$ 이다.

7. $f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때, $(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=\frac{1}{3}x+1$
② $h(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$
③ $h(x)=x+\frac{1}{3}$
④ $h(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$
⑤ $h(x)=\frac{2}{3}x+1$

해설

$f(x)=x+1$, $g(x)=3x-2$ 일 때,
$(g\circ h)(x)=f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g\circ h)(x)=g(h(x))=3h(x)-2$
$3h(x)-2=x+1$, $3h(x)=x+3$
$\therefore h(x)=\frac{1}{3}x+1$

8. $f(x) = -2x+3,\ g(x) = 4x+1$ 일 때, $f \circ g \circ h = g$ 를 만족하는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(2)$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓고

$(g \circ h)(x) = 4(ax+b)+1 = 4ax+4b+1$

$(f \circ (g \circ h))(x) = -2(4ax+4b+1)+3$

$= -8ax - 8b - 2 + 3$

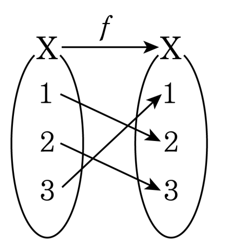
$= 4x + 1$

$a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$

$h(x) = -\dfrac{1}{2}x$

$h(2) = -1$

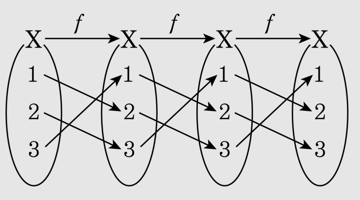
9. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f\ :\ X \ \rightarrow X$를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$라 할 때, $f^{100}(1) - f^{200}(3)$의 값은?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설



위 그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면
$f^3(1) = f(f(f(1))) = f(f(2)) = f(3) = 1$
같은 방법으로 $f^3(2) = 2, f^3(3) = 3$ 이다.
$\therefore f^3(x) = x$ 이므로
$f^{100}(x) = (f^{3\cdot 33} \circ f)(x) = f(x)$,
$f^{200}(x) = (f^{3\cdot 66} \circ f^2)(x) = f^2(x)$
$\therefore f^{100}(1) = f(1) = 2$, $f^{200}(3) = f^2(3) = f(f(3)) = f(1) = 2$
$\therefore f^{100}(1) - f^{200}(3) = 2 - 2 = 0$

10. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f$, $\cdots$ $f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

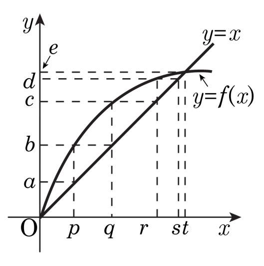
해설

$f^2(x) = f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \dfrac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = x$ 이므로

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$\therefore\ f^{2005}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3$

11. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$ ㉠

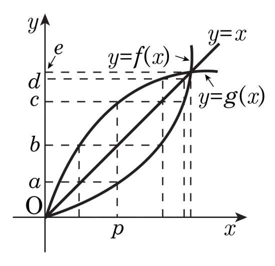
그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

12. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a ② b ③ c

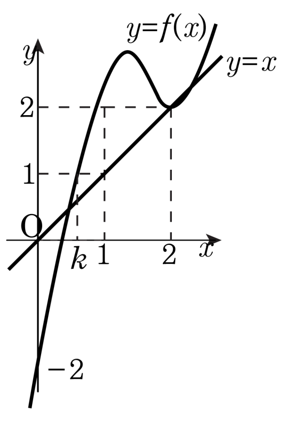
④ d ⑤ e

해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

13. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f,\ f^3 = f^2 \circ f,\ f^n = f^{n-1} \circ f$)



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 5　　⑤ 11

해설

$f(k) = 1$

$f^2(k) = f(f(k)) = f(1) = 2$

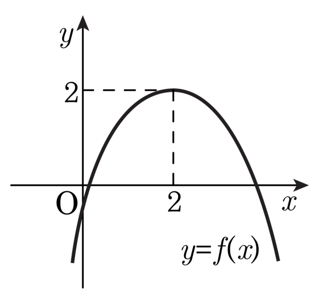
$f^3(k) = f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1)$

$\qquad = f(f(1)) = f(2) = 2$

$\qquad \vdots$

$f^{10}(k) = 2$

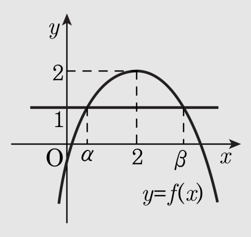
14. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$을 만족하는 t의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$를 만족하는 x의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$을 만족하는 x의 값은 2 개이다.

15. 함수 $f(x) = |x+1| - 2$ 에서 $f(x) = (f \circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2　　② -1　　③ $-\frac{3}{2}$　　④ 1　　⑤ 0

해설

$f(x) = |x+1| - 2$ 에서

$f(f(x)) = f(|x+1|-2) = ||x+1|-2+1|-2$

$= ||x+1|-1|-2$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $f(f(x)) = x-2$

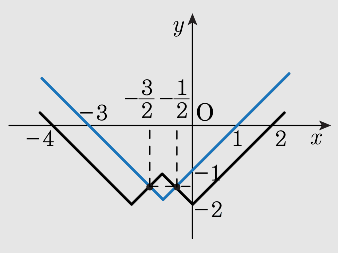
(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $f(f(x)) = -x-2$

(iii) $-2 \leq x < -1$ 일 때, $f(f(x)) = x$

(iv) $x < -2$ 일 때, $f(f(x)) = -x-4$

(i), (ii) 의 경우 $f(x) = x-1$

(iii), (iv) 의 경우 $f(x) = -x-3$



따라서 교점은 $x = -\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x) = (f \circ f)(x)$를 만족한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$

16. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 $f(x) = |x-2| + kx - 5$의 역함수가 존재할 때, 상수 k의 범위는 무엇인가?

① $k < -1$

② $-1 < k < 1$

③ $k < 1$

④ $k < -1$ 또는 $k > 1$

⑤ $k > 1$

해설

$x \geq 2$ 일 때, $f(x) = (k+1)x - 7$
$x < 2$ 일 때, $f(x) = (k-1)x - 3$
그런데 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일대응이다.
따라서, $(k+1)(k-1) > 0$ 이므로
$k < -1$ 또는 $k > 1$

17. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3(\text{단, } x \geq 0)$$

① $y = \sqrt{x+1}$(단, $x \geq -1$)　② $y = \sqrt{x+2}$(단, $x \geq -2$)
③ $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$)　④ $y = \sqrt{x+4}$(단, $x \geq -4$)
⑤ $y = \sqrt{x+5}$(단, $x \geq -5$)

해설

$x \geq 0$이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$을 x에 대하여 풀면
$x^2 = y + 3$에서 $x = \pm\sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$이어야 하므로
$x = \sqrt{y+3}$(단, $y \geq -3$)
여기서, x, y를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}$(단, $x \geq -3$)

18. 함수 $f(x) = x^2 + 2x + 3(x \geq -1)$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \sqrt{x+a} - b$ 일 때, 상수 a , b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$y = x^2 + 2x + 3$

$\Rightarrow y - 2 = (x+1)^2$

$\Rightarrow (y+1)^2 = x - 2$

$\Rightarrow y = \sqrt{x-2} - 1 \cdots f^{-1}(x)$

$\therefore a + b = -1$

19. 실수에서 정의된 함수 $f(x) = ax - 3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립하도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f^{-1} = f$ 에서 $f^{-1}(x) = f(x)$, $f(f(x)) = x$
$f(f(x)) = f(ax - 3) = a(ax - 3) - 3 = x$
모든 실수 x 에 대하여 성립하므로
$\therefore\ a^2 = 1,\ -3a - 3 = 0$
$\therefore\ a = -1$

20. 함수 $f(x)=2x+3$ 에 대하여 다음 중 틀린 것은?

① $f(0)=3$

② $f^{-1}(4)=1$

③ $(f\circ f^{-1})(5)=5$

④ $(f\circ f^{-1})(3)=3$

⑤ $(f^{-1})^{-1}(2)=7$

해설

$f(x)=2x+3$, $y=2x+3$

$\Rightarrow \quad x=2y+3$

$\Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore$ ② : $f^{-1}(4)=\frac{1}{2}$

21. 실수 전체에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x)=3x+2$, $g(x)=x+2$ 일 때, $(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(1)$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$(f^{-1}\circ g)(3)+(g^{-1}\circ f)(1)=f^{-1}(5)+g^{-1}(5)$
$f^{-1}(5)=k$ 이면 $f(k)=5, g^{-1}(5)=X$ 이면 $g(X)=5$

$\Rightarrow k=1, X=3$
$\Rightarrow$(준식)$=1+3=4$

22. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 가 아래와 같이 정의되었다고 하자.

$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \le 0) \\ 3x + 1 & (x \ge 0) \end{cases}$ 함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4)$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & (x \le 0) \\ 3x + 1 & (x \ge 0) \end{cases}$$

$f(0) = 1 = -a$

$\therefore a = -1$

$(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1)}(4) = (f^{-1} \circ f^{-1)}(4)$

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(f^{-1}(4))$

$f^{-1}(4) = k$ 라 하면 $f(k) = 4$

$3k + 1 = 4$ ($\because x \le 0$ 에서 $2x + 1 \le 1$)$k = 1$ 이고

$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(1)$

$f^{-1}(1) = m, f(m) = 1$ 에서 $2m + 1 = 1$ (또는 $3m + 1 = 1$), $m = 0$

$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(4) = 0$

23. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^3 + 1$ 에 대하여 $\left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(2)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\left(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g\right)(2) = x$ 로 놓으면

$\left(g \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ g\right)(2) = x$

$\left(f^{-1} \circ g\right)(2) = x$

$g(2) = f(x)$

$2^3 + 1 = 2x - 1$ 에서 $9 = 2x - 1$

$\therefore\ x = 5$

24. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$, 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $h(x) = 2g(x) + 1$ ② $h(x) = 2g(x) - 1$

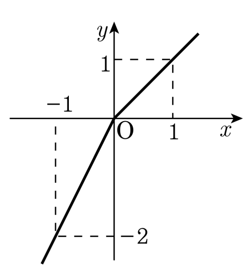
③ $h(x) = \frac{1}{2}\{g(x) + 1\}$ ④ $h(x) = g(\frac{x}{2} + 1)$

⑤ $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로
$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x - 1 = g(y) \cdots$ ㉠
$f(2x-1)$ 의 역함수가 $h(x)$ 이므로
$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 x 를 소거하면 $2h(y) - 1 = g(h)$
그러므로 $h(y) = \frac{1}{2}\{g(h) + 1\}$
$\therefore\ h(x) = \frac{1}{2}\{g(x) + 1\}$

25. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1, 1), (-1, -2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(10) = f(f(10))$

㉡ $f^{-1}(-2) = -1$

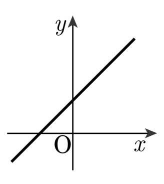
㉢ $y = f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

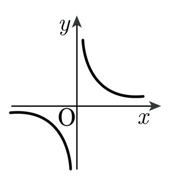
① ㉠　② ㉢　③ ㉠,㉡
④ ㉡,㉢　⑤ ㉠,㉡,㉢

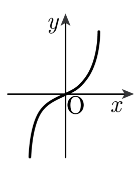
해설

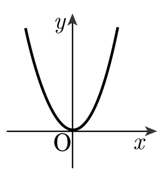
㉠ $f(10) = 10$
$f(f(10)) = f(10) = 10$
$\therefore f(10) = f(f(10))$ (참)
㉡ $f(-1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = -1$ (참)
㉢ $y = f^-1(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 $y = x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 는
무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

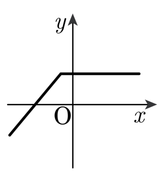
26. 다음 중 임의의 실수 x에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$를 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$이다.
그런데 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$를 만족하려면
함수 $f(x)$는 일대일 대응이고
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이어야 한다.

27. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

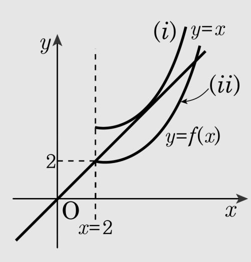
해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
$\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

28. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k(x \geq 2)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $0 < k < \frac{25}{4}$ ② $k < \frac{25}{4}$ ③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$ ⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설



주어진 함수 $y = f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$위에 있다.
따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4(x \geq 2)$의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$가 접할 때,
$x^2 - 4x + k = x$, $x^2 - 5x + k = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D = 5^2 - 4k = 0$
$\therefore \mathrm{k} = \frac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때
$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$이므로 $k = 6$

(i), (ii)에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

29. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

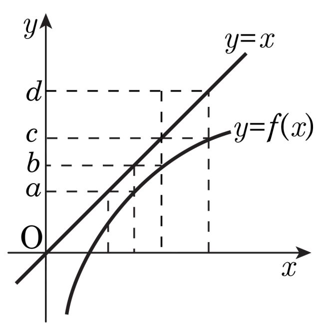
해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
$x^2 - 4x + 6 = x$ 에서
$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2, 2), (3, 3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

해설

$x^2 - 4x + 6 = x$,
즉 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 6$
따라서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$
$= \sqrt{2}\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6} = \sqrt{2}$

30. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
$f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

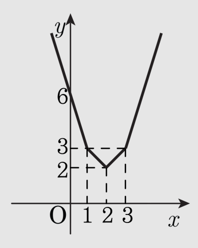
31. 함수 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 $m,\ n$ 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 에서
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x-1+x-2+x-3 = 3x-6$
(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x-1+x-2-(x-3) = x$
(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2)-(x-3) = -x+4$
(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)-(x-2)-(x-3) = -3x+6$
따라서 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2,\ n = 2$
$\therefore mn = 4$

32. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

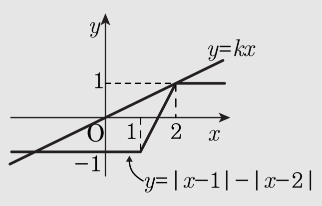
$y = |x-1| - |x-2|$

(ⅰ) $x \geq 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2) = 1$

(ⅱ) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1+x-2 = 2x-3$

(ⅲ) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)+(x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



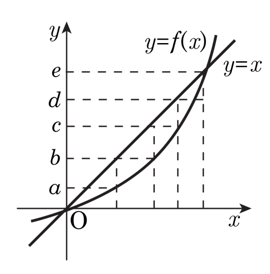
$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ①이다.

33. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. $(f\circ f\circ f)^{-1}(a)$ 의 값은?

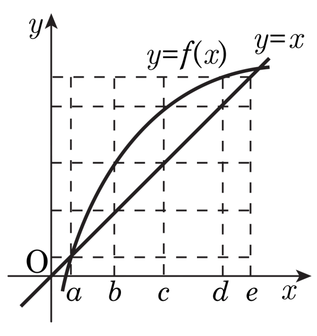


① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

해설

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)^{-1}(a) &= (f^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\ &= f^{-1}(f^{-1}(b))\\ &= f^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

34. 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$ 의 값을 구하면?



① a　　② c

③ $a + b - c$　　④ $a + c - e$

⑤ $a + b + c - d - e$

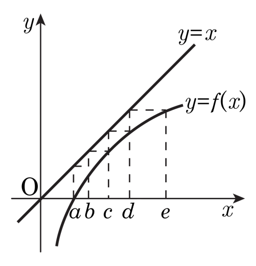
해설

$f(d) = e, f(c) = d, f(b) = c, f(a) = a$

$\Rightarrow g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$

$\therefore\ a + c + d - c - d = a$

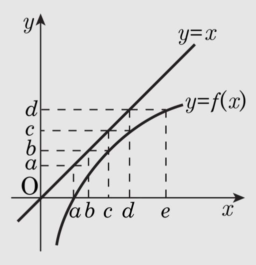
35. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$
$= f^{-1}(f^{-1}(b))$ 이므로
$f^{-1}(b) = m$ 이라고 하면



$f(m) = b$ 다음 그래프에서 $f(c) = b$ 이므로 $m = f^{1}(b) = c$
$\therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$
$f^{-1}(c) = n$ 이라고 하면
$f(n) = c$ 그래프에서 $f(d) = c$ 이므로
$n = f^{-1}(c) = d$
$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$

36. 점 $(6, -2)$를 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2(a \neq 0)$로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$이므로
$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

37. 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$가 성립하는 함수 $f(x)$를 기함수라고 한다. 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 기함수일 때, 다음 <보기>의 함수 중 기함수인 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $g(x) \cdot h(x)$ Ⅱ. $g(x) + h(x)$ Ⅲ. $g(h(x))$

① Ⅰ　　② Ⅱ　　③ Ⅰ, Ⅲ

④ Ⅱ, Ⅲ　　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $g(-x) \cdot h(-x) = \{-g(x)\} \cdot \{-h(x)\}$
$= g(x)h(x)$ (우함수)

Ⅱ. $g(-x) + h(-x) = -g(x) - h(x)$
$= -\{g(x) + h(x)\}$ (기함수)

Ⅲ. $g(h(-x)) = g(-h(x))$
$= -g(h(x))$ (기함수)

38. $-4 \le x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2 개　　② 4 개　　③ 6 개　　④ 8 개　　⑤ 10 개

해설

i) $-4 \le x < -2$ 일 때,

$-2 \le \frac{x}{2} < -1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -2$

ii) $-2 \le x < 0$ 일 때,

$-1 \le \frac{x}{2} < 0$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -1$

iii) $0 \le x < 2$ 일 때,

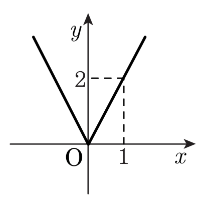
$0 \le \frac{x}{2} < 1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 0$

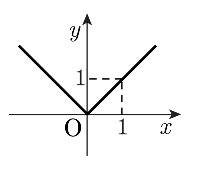
iv) $2 \le x < 4$ 일 때,

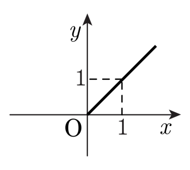
$1 \le \frac{x}{2} < 2$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 1$

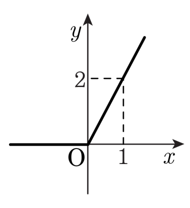
이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4 개이다.

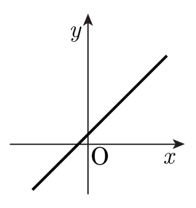
39. 다음 중 함수 $y = x + |x|$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$y = x + |x|$ 에서
$x \le 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고
$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

40. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $y = 2|x-1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M , m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

$y = 2|x-1| + x$ 에서
(i) $x \ge 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$
(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1) + x = -x + 2$ 이므로
$0 \le x \le 3$ 에서 $y = 2|x-1| + x$
따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7 , $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로
$M + m = 7 + 1 = 8$

41. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

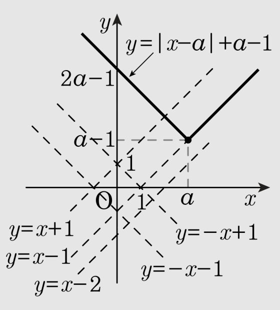
① $y=x+1$　　② $y=x-1$　　③ $y=x-2$

④ $y=-x-1$　　⑤ $y=-x+1$

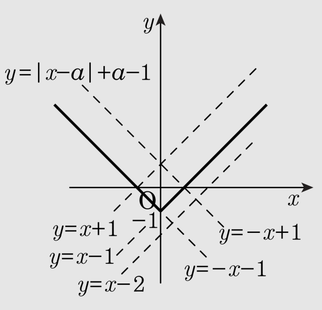
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

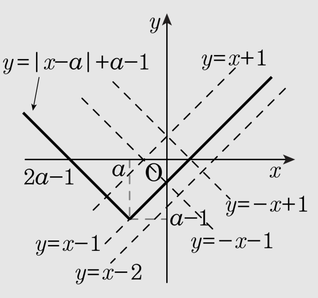
i) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a\le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.



ii) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



iii) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



i), ii), iii) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

42. $|x|+|y|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$|x|+|y|=2$ 의 그래프는
$x+y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이동한 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 =$
8