

1. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 ‘ $\sim p$ 또는 q ’의 부정은?

$$p : -1 < x \leq 3, \quad q : 0 < x \leq 2$$

- ① $-1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$
- ② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \leq x \leq 3$
- ③ $-1 < x \leq 3$
- ④ $0 < x \leq 2$
- ⑤ x 는 모든 실수

해설

$\sim (\sim p \text{ 또는 } q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데
 $\sim q : x \leq 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3)$ 이고 $(x \leq 0$ 또는 $x > 2)$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3$ 이고 $x \leq 0)$ 또는 $(-1 < x \leq 3$ 이고 $x > 2)$
 $\leftrightarrow -1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

2. a, b, c 가 실수일 때, ' $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ 이다'의 부정은?

- ① $a = 0$ 또는 $b = 0$ 또는 $c = 0$
- ② $abc \neq 0$
- ③ $a \neq b \neq c$
- ④ a, b, c 모두 0 이 아니다.
- ⑤ a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \leftrightarrow a = b = c = 0$, $a = b = c = 0$ 의 부정은
 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이다.
즉, a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

3. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 할 때, ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합을 구하면?

① $P - Q$

② $Q - P$

③ $P^c \cup Q$

④ $P \cup Q^c$

⑤ $P \cap Q^c$

해설

조건 $\sim q$ 를 만족하는 집합이 Q^c 이므로 ' p 또는 $\sim q$ '를 만족하는 집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

4. 다음 명제 중 참인 것은?

- ① p 가 소수이면 $\sqrt{p}$ 는 무리수이다.
- ② $x < y$ 이면 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ 이다. (단, $x \neq 0, y \neq 0$)
- ③ $\triangle ABC$ 가 직각삼각형이면 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이다.
- ④ $a + b$ 가 짝수이면 a, b 는 짝수이다.
- ⑤ 12와 18의 공약수는 9의 약수이다.

해설

- ① 소수 $p = k^2$ 이 될 수 없으므로 $\sqrt{p}$ 는 무리수
- ② 반례 : $x = -1, y = 1$, 즉 두 수의 부호가 다르면 성립하지 않는다.
- ③ 직각삼각형의 빗변이 $\overline{AC}$ 이 아닌 다른 변이 될 수도 있다.
- ④ 반례 : $a = 1, b = 3$
- ⑤ 12와 18의 공약수는 6의 약수이다.

5. 다음 다섯 개의 명제 중 참인 명제의 개수는? (단, a, b, c 는 실수)

- ㉠

$|a| + |b| = 0 \leftrightarrow ab = 0$
- ㉡

$a < b$ 이면 $ac < bc$ 이다.
- ㉢

$a < b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다.
- ㉣

$a + b\sqrt{3} = 0$ 이면 $a = 0$ 그리고 $b = 0$
- ㉤

$a < b$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

- ㉠

$|a| + |b| = 0 \leftrightarrow a = b = 0 \leftrightarrow ab = 0$
- ㉡

$c \leq 0$ 인 경우 성립하지 않는다.
- ㉢

반례 : $a = -1, b = 0$
- ㉣

반례 : $a = \sqrt{3}, b = -1$ (a, b 가 유리수일 때 명제가 성립한다.)
- ㉤

반례 : $a = -1, b = 1$ (a, b 가 같은 부호일 때 성립한다.)

6. 다음 보기의 명제 중 참인 것을 모두 고르면?

- ㉠ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.
- ㉡ 정사각형은 마름모이다.
- ㉢ 임의의 유리수 x 에 대하여 $\sqrt{2}x$ 는 무리수이다.
- ㉣ $a + b > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이다.
- ㉤ x 가 6의 약수이면 x 는 12의 약수이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉣, ㉤ ④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉢, ㉤

해설

(반례) ㉠ $a = 1, b = -4$ ㉣ $x = 0$ ㉤ $a = 5, b = -4$
∴ ㉡, ㉤만 참이다.

7. 다음 명제 중 참인 것은? (단, x, y, z 는 실수이다.)

- ① $xz = yz$ 이면 $x = y$ 이다.
- ② $x + y > 0, xy > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다.
- ③ x 가 3 의 배수이면 x 는 9 의 배수이다.
- ④ $x^2 + y^2 \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다.
- ⑤ 삼각형 ABC 가 이등변삼각형이면 정삼각형이다.

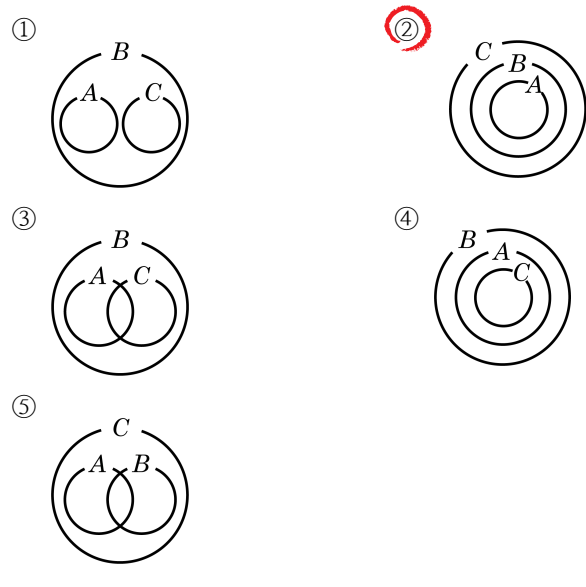
해설

- ② $xy > 0$ 이면, x 와 y 의 부호가 같다는 것인데 $x + y > 0$ 이려면 둘 다 양수여야 하므로 참이다.

8. 다음의 두 명제 p, q 가 참일 때,

$$p : x \in A \text{ 이면 } x \in B \text{ 이다.}$$
$$q : x \notin C \text{ 이면 } x \notin B \text{ 이다.}$$

세 집합 A, B, C 사이의 포함관계를 벤다이어그램으로 옳게 나타낸 것은?



해설

조건 $p : A \subset B$ 조건, $q : C^c \subset B^c \Leftrightarrow B \subset C \therefore A \subset B \subset C$

9. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자.
명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, $\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q^c$ 와 같은 것은?

① $\emptyset$ ② U ③ P ④ Q ⑤ Q^c

해설

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$$P \subset Q^c$$

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q^c$$

$$= \{P \cap (Q \cap Q^c)\} \cap Q^c$$

$$= (P \cap U) \cap Q^c$$

$$= P \cap Q^c = P$$

10. 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 이다.’ 는 참이고, ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이다.’ 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-4 \leq k \leq -1$

② $1 \leq k \leq 4$

③ $-1 \leq k < 1$

④ $1 < k \leq 4$

⑤ $-4 \leq k \leq 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 가 참이므로 $k \leq 4$

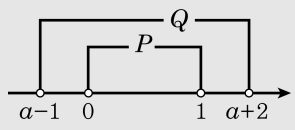
어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$

$\therefore 1 < k \leq 4$

11. 명제 ‘ $0 < x \leq 1$ 이면 $a - 1 < x < a + 2$ 이다.’가 참이 되도록 하는 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < a < 1$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-1 < a < 1$
 ④ $-1 < a \leq 1$ ⑤ $0 < a \leq 2$

해설



$p : 0 < x \leq 1$, $q : a - 1 < x < a + 2$ 라 하고, 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다.

위 그림에서 $a - 1 \leq 0$, $a + 2 > 1$

$a \leq 1$, $a > -1$

$\therefore -1 < a \leq 1$

12. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
(1), (2), (3)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

[증명]
주어진 명제의 (1)을 (를) 구하여 보면
(1) : ‘ n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.’
이 때, n 이 홀수이므로 n 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
 $n = (2)(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, n^2 의 값을 구하면
 $n^2 = (2)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$ 는 (3)이므로 n^2 은 홀수이다.
따라서 (1)가 (이) 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

- ① 역, $2k + 1, 0$ 또는 짝수
- ② 이, $2k - 1$, 홀수
- ③ 대우, $2k + 1, 0$ 또는 짝수
- ④ 대우, $2k - 1, 0$ 또는 홀수
- ⑤ 역, $2k + 1, 0$ 또는 홀수

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구하여 보면
대우 : ‘ n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.’
이 때, n 이 홀수이므로 n 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
 $n = 2k + 1(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, n^2 의 값을 구하면
 $n^2 = 2 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$ 는 0 또는 짝수이므로 n^2 은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

13. x, y 가 실수일 때 세 명제 $p : xy = 0, q : |x| + |y| = 0, r : x + y = 0$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
 - ② p 는 r 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
 - ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 - ④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.
 - ⑤ q 는 r 이기 위한 충분조건이다.

해설

$p : xy = 0 \rightarrow x = 0$ 또는 $y = 0$
 $q : |x| + |y| = 0 \rightarrow x = 0$ 그리고 $y = 0$
 $r : x + y = 0 \rightarrow x = -y$
 $\therefore q \rightarrow p$ { p 는 q 이기 위한 필요조건 }
 q 는 p 이기 위한 충분조건
 $q \rightarrow r$ { p 는 r 이기 위한 필요조건 }
 r 은 p 이기 위한 충분조건

14. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은?
- ① $p : ac = bc, q : a = b$
 - ② $p : A \subset B, q : A - B = \emptyset$
 - ③ $p : a > 0$ 이고 $b < 0, q : ab < 0$
 - ④ $p : a + b$ 가 정수, $q : a, b$ 가 정수
 - ⑤ $p : \triangle ABC$ 는 정삼각형이다. $q : \triangle ABC$ 의 세 내각의 크기가 같다.

해설

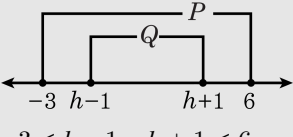
- ① $ac = bc \quad \begin{array}{|c|} \hline \xrightarrow{\times} \\ \xleftarrow{\circ} \\ \hline \end{array} \quad a = b$ (반례 : $a = 1, b = 2, c = 0$)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건
- ② $A \subset B \quad \begin{array}{|c|} \hline \xrightarrow{\circ} \\ \xleftarrow{\circ} \\ \hline \end{array} \quad A - B = \emptyset$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건
- ③ $a > 0$ 이고 $b < 0 \quad \begin{array}{|c|} \hline \xrightarrow{\circ} \\ \xleftarrow{\times} \\ \hline \end{array} \quad ab < 0$ (반례 : $a = -2, b = 2$)
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건
- ④ $a + b$ 가 정수 $\begin{array}{|c|} \hline \xrightarrow{\times} \\ \xleftarrow{\circ} \\ \hline \end{array} \quad a, b$ 가 정수 (반례 : $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$)
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건
- ⑤ 세 내각의 크기가 같은 삼각형은 정삼각형이다.
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건

15. 두 조건 $p : |x - h| \leq 1, q : -3 \leq x \leq 6$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건일 때, 정수 h 의 개수는?

- ① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

$P = \{x \mid h - 1 \leq x \leq h + 1\}$
 $Q = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$
 $p \rightarrow q(\text{참}) \Rightarrow P \subset Q$



$-3 \leq h - 1, \quad h + 1 \leq 6$
 $\therefore -2 \leq h \leq 5$
따라서 정수 h 의 개수는 8개이다.

16. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. p 는 q 이기 위한 충분조건이고 $\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

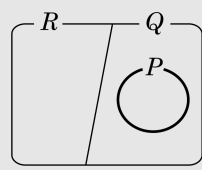
- ① $R \cap Q = R$ ② $R \cup Q = R$ ③ $P \cap Q = \emptyset$
 ④ $P \cup R = R$ ⑤ $P \cap R = \emptyset$

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

$\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로 $R^c = Q$

따라서, 세 집합의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같으므로



$\therefore P \cap R = \emptyset$

17. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{b+1}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} &= \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0 \\ (\because a > b > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

18. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $a > 0, b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
- ② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$
- ③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$
- ④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \leq |a| - |b|$
- ⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

- ① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
 $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
 $\Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
- ② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
- ③ : (반례) $a = 0, b = 0$

19. 다음 중 세 수 3^{30} , 4^{20} , 12^{15} 의 대소 관계를 알맞게 나타낸 것은?

① $3^{30} > 4^{20} > 12^{15}$

② $4^{20} > 3^{30} > 12^{15}$

③ $12^{15} > 4^{20} > 3^{30}$

④ $3^{30} > 12^{15} > 4^{20}$

⑤ $12^{15} > 3^{30} > 4^{20}$

해설

$$\left(\frac{3^{1.5}}{4}\right)^{20} = \left(\frac{3 \times 1.7}{4}\right)^{20} > 1(3^{1.5} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.7)$$

따라서 3^{30} 이 4^{20} 보다 크다.

$$\left(\frac{3^2}{12}\right)^{15} = \left(\frac{3}{4}\right)^{15} < 1 \text{ 이 결과에서}$$

12^{15} 이 3^{30} 보다 크다는 것을 알 수 있다.

20. 다음 중 절대부등식 $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ① $a = b$
- ② $ab > 0$
- ③ $a = b = 0$
- ④ $a > b$
- ⑤ $b > a$

해설

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab &= a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 \\ &= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \quad (\because \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0) \\ \therefore a^2 + b^2 &\geq ab \end{aligned}$$

단, 등호는 $a + \frac{1}{2}b = 0$ 이고 $b = 0$

즉, $a = 0$ 이고 $b = 0$ 일 때, 성립한다.

21. $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

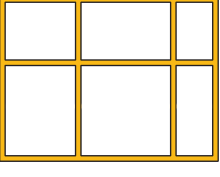
해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) &= ab + \frac{4}{ab} + 5 \\ &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9\end{aligned}$$

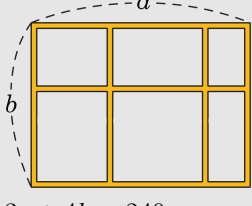
따라서, 최솟값은 9

22. 길이가 240인 끈을 가지고 운동장에 다음 그림과 같은 6개의 작은 직사각형을 그리려고 한다. 사각형의 전체 넓이의 최대값과 이 때 전체 직사각형의 가로, 세로의 길이를 구하면? (최대값, 가로의 길이)



- ① (600, 40) ② (1200, 40) ③ (600, 30)
④ (1200, 30) ⑤ (450, 60)

해설



$$\begin{aligned} 3a + 4b &= 240 \\ 3a + 4b &\geq 2 \cdot \sqrt{3a \cdot 4b} \\ 240 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{12}} &\geq \sqrt{ab} (\because 3a + 4b = 240) \\ \therefore 1200 &\geq ab \\ \text{단, 등호는 } 3a &= 4b \text{ 일 때 성립하므로,} \\ 3a + 4b &= 6a = 240, \\ \therefore a &= 40 \end{aligned}$$

23. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때, $a + \sqrt{2}b + c$ 의 값을 P 라 하면, P 의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \leq P \leq \sqrt{2}$

② $-2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

③ $-\sqrt{3} \leq P \leq \sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3} \leq P \leq 2\sqrt{3}$

⑤ $-3\sqrt{3} \leq P \leq 3\sqrt{3}$

해설

a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ 일 때
코시-슈바르츠 부등식을 이용하여
 $(1^2 + \sqrt{2}^2 + 1)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + \sqrt{2}b + c)^2$
 $4 \cdot 2 \geq (a + \sqrt{2}b + c)^2$
 $\therefore -2\sqrt{2} \leq a + \sqrt{2}b + c \leq 2\sqrt{2}$
 $\Rightarrow -2\sqrt{2} \leq P \leq 2\sqrt{2}$

24. 실수 x, y 에 대하여 $3x + 4y = 5$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

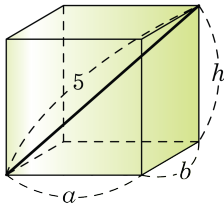
해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해
 $(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2$
 $25(x^2 + y^2) \geq 25$
 $\therefore x^2 + y^2 \geq 1$

해설

$3x + 4y = 5$ 에서
 $y = \frac{1}{4}(5 - 3x)$
 $x^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{16}(3x - 5)^2$
 $= x^2 + \frac{1}{16}(9x^2 - 30x + 25)$
 $= \frac{25}{16}x^2 - \frac{30}{16}x + \frac{25}{16}$
 $= \frac{25}{16}\left(x^2 - \frac{6}{5}x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \frac{25}{16}$
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{25}{16}$
 $= \frac{25}{16}\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + 1$

25. 코시-슈바르츠 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ 을 이용하여 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, h 이고, 대각선의 길이가 5인 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합의 최댓값을 구하면?



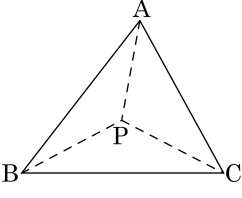
- ① $5\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $20\sqrt{3}$
 ④ $25\sqrt{5}$ ⑤ $24\sqrt{6}$

해설

$a^2 + b^2 + h^2 = 25$
 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.
 $(a^2 + b^2 + h^2)(4^2 + 4^2 + 4^2) \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $25 \cdot 48 \geq (4a + 4b + 4h)^2$
 $\Rightarrow 4(a + b + h) \leq 5\sqrt{48} = 20\sqrt{3}$
 $\therefore$ 모서리의 길이의 합 $4(a + b + h)$ 의 최댓값
 $: 20\sqrt{3}$

26. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

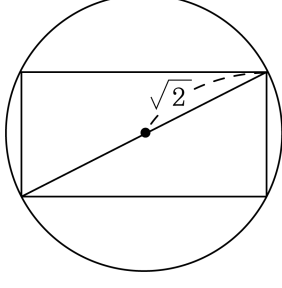
- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
 ④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



해설

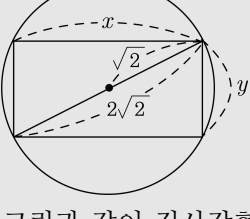
$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 + S_3 &= a \\
 (1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) &\geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2 \\
 \therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &\geq \frac{a^2}{3}
 \end{aligned}$$

27. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $x, y(x > 0, y > 0)$ 라고 하면
 $x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64$ (단, 등호는 $x = y$ 일 때 성립)
 $\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.

28. 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$

㉡ $g(x) = |x|$

㉢ $h(x) = x^2$

㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = |x| = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

29. 정의역이 X 인 두 함수 $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^2 - 2x$ 가 서로 같은 함수일 때, 집합 X 로 적당한 것은?

① $\{-1, 0, 1\}$

② $\{0, 1, 2\}$

③ $\{1, 2, 3\}$

④ $\{-2, 0, 2\}$

⑤ $\{0, 1, 4\}$

해설

$f(x) = g(x)$ 에서

$$x^3 = 3x^2 - 2x, x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0, x(x-2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0, 2, 1$$

따라서 집합 X 로 적당한 것은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.

30. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \leq y \leq 3\}$ 일 때 함수 $f : X \rightarrow Y, y = ax + b (a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는 상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.

$\therefore x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고

$$-a + b = 3$$

$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며

$$2a + b = 0 \text{ 두 식을 연립하면 } a = -1, b = 2$$

$$\therefore a + b = 1$$

31. 자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지를 $f(n)$ 으로 나타내고, $a_n = f(n^2) - f(n)$ 이라고 할 때, a_{2004} 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(자연수 n 을 10 으로 나눈 나머지)

$= (n \text{ 의 일의 자리수})$

$$a_{2004} = f(2004^2) - f(2004) = 6 - 4 = 2$$

32. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

- ① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f : A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이라면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

33. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다. 그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

34. 다음은 ‘자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면 n 도 3의 배수이다.’라는 명제를 대우를 이용하여 증명하는 과정이다. (가), (나), (다), (라), (마)에 들어갈 알맞은 식 또는 수끼리 짝지은 것을 고르면?

대우는 ‘자연수 n 에 대하여, n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다.’이다. 3의 배수가 아닌 자연수 n 은 3으로 나누면 나머지가 1 또는 2이므로
 $n = (\text{가})$ 또는 $n = (\text{나})$ (단, k 는 음이 아닌 정수)로 가정할 수 있다.
(i) $n = (\text{가})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{다}) + 1$
(ii) $n = (\text{나})$ 일 때
 $n^2 = 3(\text{라}) + 1$
이 되어 n^2 은 3으로 나누면 나머지가 (마)인 자연수가 된다.
(i), (ii)에 의하여 n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다. 그러므로 주어진 명제는 참인 명제이다.

① $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

② $3k - 1, 3k - 2, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

③ $3k + 2, 3k + 1, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 2$

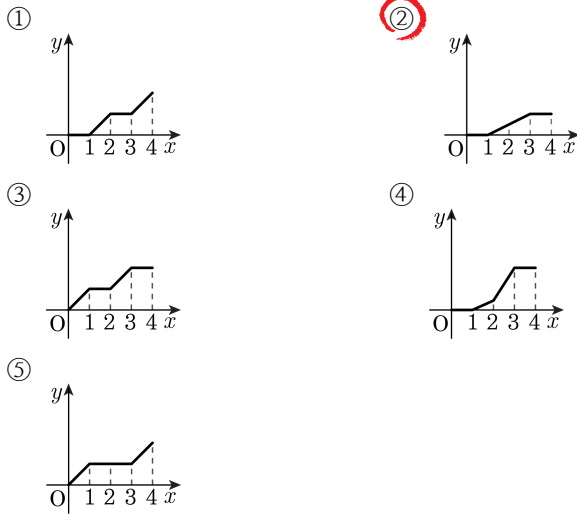
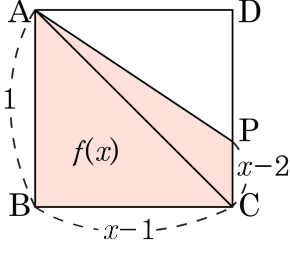
④ $3k - 2, 3k - 1, (3k^2 - 4k + 1), (3k^2 - 2k), 1$

⑤ $3k + 1, 3k + 2, (3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1), 1$

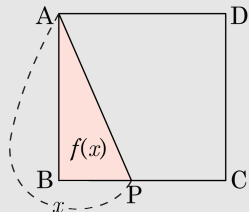
해설

3의 배수가 아닌 수들은 3으로 나뉘서 1 또는 2가 남아야 하므로 $3k + 1$ 또는 $3k + 2$ 이어야 한다.
제곱을 하여 계산하면 (다), (라)는 각각 $(3k^2 + 2k), (3k^2 + 4k + 1)$ 가 되고, 나머지가 1인 자연수가 된다.
따라서 주어진 명제는 참인 명제이다.

35. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \quad \text{한편, 각 구간의 경계점에서}$$

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

36. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

37. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

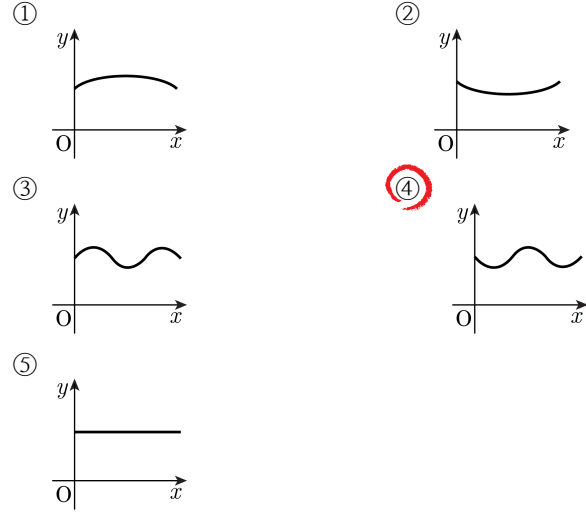
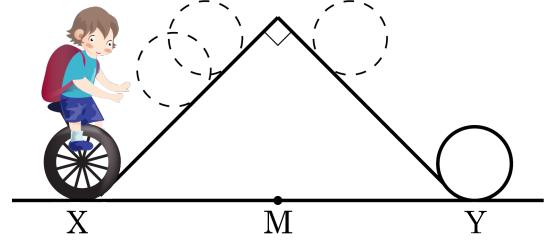
집합 $A = \{a, b, c\}$ 일 때, A 에서 A 로의 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여,
함수의 개수는 m 개,
일대일 대응 함수의 개수는 n 개,
상수 함수는 s 개,
항등함수는 r 개이다.
 $m + n + s + r$ 의 값을 구하여라.

- ① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$ (가지) $\therefore m = 27$
일대일 대응의 개수는
 $3 \times 2 \times 1 = 6$ (가지) $\therefore n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c 인 경우의 3가지
 $\therefore s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore r = 1$
따라서 $m + n + s + r = 27 + 6 + 3 + 1 = 37$

38. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y 라 하고, 선분 XY 의 중점을 M 이라 하자. 철수가 X 에서 출발하여 최단 거리로 Y 까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t 와 점 M 에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d 에 대하여 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)



해설

따라서 d 를 t 의 함수로 나타낸 그래프는

39. $f(x) = x^2 - x$ 로 나타내어지는 함수 $f : A \rightarrow A$ 는 $A = \{x \mid x \geq a\}$ 이면 일대일대응이다. a 의 값을 구하면 ?

- ① 4
- ② 2
- ③ $\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{4}$
- ⑤ 0

해설

$f : A \rightarrow A$ 가 일대일함수이므로
그림에서 $a \geq \frac{1}{2}$ 이고 또한 일대일대
응이므로
 $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에서 $f(a) = a$ 이어야
한다.
 $f(x) = x^2 - x$ 에서 $f(a) = a$ 이므로
 $a^2 - a = a \rightarrow a^2 - 2a = 0$
 $\therefore a = 0, 2$
그런데, $a \geq \frac{1}{2}$ 이므로
 $\therefore a = 2$