

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① -3 은 -27 의 세제곱근이다.
- ② 81 의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$ 이다.
- ③ $-\sqrt[4]{81} = -3$
- ④ $\sqrt{-16} = -2$
- ⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

- ④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt{-16} = \pm 2$

2. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 4017

해설

(준식) $= |-2014| + (-2015) = -1$

3. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$ 를 $4^{\frac{n}{m}}$ 으로 나타낼때, $m+n$ 의 값은? (단, m, n 은 서로소인 자연수)

- ① 21
- ② 22
- ③ 39
- ④ 41
- ⑤ 49

해설

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} &= \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

또한, $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18} + \frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}} \\ \therefore m &= 36, n = 13 \\ \therefore m+n &= 49\end{aligned}$$

4. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$ 에서

$$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$$

5. $\log_3 2 = a$ 일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$ 를 a 로 나타내면?

① $\frac{2}{2a+1}$

② $\frac{4}{2a+1}$

③ $\frac{2}{a+1}$

④ $\frac{2}{a+2}$

⑤ $\frac{4}{a+2}$

해설

$$\begin{aligned} & \log_{\sqrt{12}} 9 \\ &= \frac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \frac{2}{\frac{1}{2} \log_3 (2^2 \cdot 3)} \\ &= \frac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \frac{4}{2(a+1)} = \frac{2}{a+1} \end{aligned}$$

6. $\frac{1}{2} \log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$ 일 때, $a + 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

7. $2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} &= 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1} \\ &= 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

8. $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12

② 15

③ 18

④ 21

⑤ 24

해설

$$(\sqrt[3]{3} - 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 - 1 = 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} - 1$$

$$(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1) = (\sqrt[3]{3})^3 + 1 = 4 \text{ 이므로}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1} = \sqrt[3]{3} + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1} + \frac{4}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}\right)^3 \\ = (\sqrt[3]{3} - 1 + \sqrt[3]{3} + 1)^3 = (2 \cdot \sqrt[3]{3})^3 = 24 \end{aligned}$$

9. $2^{2x} = 3$ 일 때, $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{2}{7}$

③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{3}{7}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x} 를 곱하면

$$\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} = \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^{3x}}{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^{3x}}$$

$$= \frac{2^{4x} + 2^{2x}}{2^{6x} + 1} = \frac{(2^{2x})^2 + 2^{2x}}{(2^{2x})^3 + 1}$$

$$= \frac{3^2 + 3}{3^3 + 1} = \frac{3}{7}$$

10. 실수 a, b 에 대하여 $2^a = 3$, $2^b = 45$ 일 때, 2^{2a-b} 의 값은?

- ① 5 ② 4 ③ 3 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$\begin{aligned} 2^{2a-b} &= 2^{2a} \cdot 2^{-b} = (2^a)^2 (2^b)^{-1} \\ &= 3^2 \times \frac{1}{45} \end{aligned}$$

11. 모든 실수 x 에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$ 이 의미를 갖기 위한 정수 k 의 개수는?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\log_a b$ 에서 $a > 0, a \neq 1, b > 0$

(i) $(k-2)^2 > 0 \rightarrow k \neq 2$

(ii) $(k-2)^2 \neq 1 \rightarrow k \neq 3, 1$

(ii) $kx^2+kx+1 > 0$

$\rightarrow k = 0$ 또는 $k > 0$ 일때, $k^2 - 4k < 0$

$\therefore 0 < k < 4$

따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k 는 0

12. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2 + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & \log_{10} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99}\right) \\ &= \log_{10} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \log_{10} 100 = 2 \end{aligned}$$

13. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 1.5$ 의 값을 계산하면?

① 0.0880

② 0.0885

③ 0.1660

④ 0.1761

⑤ 0.1777

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 1.5 &= \log_{10} (3 \times 5 \div 10) \\ &= \log 3 + (1 - \log 2) - 1 \\ &= 0.1761\end{aligned}$$

14. 두 양수 A , $\frac{1}{A}$ 의 상용로그의 소수 부분을 각각 α , β 라고 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$ 이 정수 부분을 n 이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$$

$$= -(n + \alpha) = -n - \alpha$$

$$= (-n - 1) + (1 - \alpha)$$

따라서 $\log \frac{1}{A}$ 의 소수 부분은 $1 - \alpha$ 이므로 $\beta = 1 - \alpha$

$$\therefore \alpha + \beta = \alpha + (1 - \alpha) = 1$$

15. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$$\begin{aligned}\log_{10} 275 &= \log_{10}^{25 \times 11} = 2 \log_{10}^5 + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - \log_{10}^2) + \log_{10}^{11} \\ &= 2(1 - 0.301) + 1.041 \\ &= 2.439 \\ &\text{소수 셋째 자리에서 반올림하면 } 2.44\end{aligned}$$

16. $\log a = 0.08$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^{20}$ 은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타나는가?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\log \left(\frac{1}{a}\right)^{20} = \log a^{-20} = -20 \log a = -20 \times 0.08$$

$$= -1.6 = -2 + 0.4 = \bar{2}.4$$

따라서 지표가 -2 이므로 소수점 아래 2 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나온다.

17. 상용로그 $\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2 + 3x + k = 0$ 의 두 근이고, 상용로그 $\log B$ 의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $3x^2 - 4kx - 3 = 0$ 의 두 근일 때, $\frac{A}{B}$ 의 값은? (단, k 는 상수)

- ① $10^{-\frac{5}{6}}$ ② $10^{-\frac{1}{6}}$ ③ $10^{\frac{5}{6}}$ ④ $10^{\frac{7}{6}}$ ⑤ $10^{\frac{11}{6}}$

해설

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면
 n 과 α 는 이차방정식 $2x^2 + 3x + k = 0$ 의 두 근이므로
 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = -\frac{3}{2}, \quad n\alpha = \frac{k}{2}$$

$$n + \alpha = -2 + \frac{1}{2} \text{ 이므로 } n = -2, \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore k = 2n\alpha = 2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} = -2$$

따라서 이차방정식 $3x^2 + 8x - 3 = 0$ 에서

$$(x+3)(3x-1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \log B = -3 + \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore A = 10^{-\frac{3}{2}}, B = 10^{-\frac{8}{3}}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = 10^{-\frac{3}{2} + \frac{8}{3}} = 10^{\frac{7}{6}}$$

18. $2^x = \sqrt{3} + 2$ 일 때, $\frac{4^x + 4^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{12}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{14}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{12}$

해설

$$4^x = (2^x)^2 = (\sqrt{3} + 2)^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$4^{-x} = \frac{1}{4^x} = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{(7 + 4\sqrt{3})(7 - 4\sqrt{3})} \\ = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{7^2 - (4\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{4^x + 4^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{(7 + 4\sqrt{3}) + (7 - 4\sqrt{3})}{(7 + 4\sqrt{3}) - (7 - 4\sqrt{3})} \\ = \frac{14}{8\sqrt{3}} \\ = \frac{7\sqrt{3}}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \\ = \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

19. $60^a = 3$, $60^b = 5$ 일 때, $12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}}$ 는?

- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{12}$

해설

$60^a = 3$, $60^b = 5$ 에서 두 식을 곱하면 $60^{a+b} = 15$

$\frac{60}{60^{a+b}} = \frac{60}{15}$ 이므로 $60^{1-a-b} = 4 \dots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$

$60^b = 5$ 에서 $\frac{60}{60^b} = \frac{60}{5}$ 이므로 $60^{1-b} = 12 \dots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$

$\textcircled{\small{\text{㉡}}}$ 에서 $12 = 60^{1-b}$, $12^{\frac{1}{1-b}} = 60$, $(12^{\frac{1}{1-b}})^{1-a-b} = 60^{1-a-b}$

$\textcircled{\small{\text{㉠}}}$ 에 의해 $12^{\frac{1-a-b}{1-b}} = 4$, $(12^{\frac{1-a-b}{1-b}})^{\frac{1}{2}} = 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 4^{\frac{1}{2}}$

$\therefore 12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}} = 2$

20. $\log 43.1 = 1.3645$ 일 때,
 $a = \log 4310$, $\log b = -1.3655$ 라 하면, $a + 100b$ 의 값은?

① 2.9745

② 4.0665

③ 7.9445

④ 3.1932

⑤ 5.5913

해설

$$\begin{aligned} a &= \log 4310 = \log 43.1 \times 100 \\ &= \log 43.1 + 2 = 3.6345 \\ \log b &= -1.3655 = -3 + 1.6345 \\ &= \log_{10} 10^{-3} + \log 43.1 \\ &= \log 0.0431 \\ b &= 0.0431 \\ a + 100b &= 3.6345 + 4.31 \\ &= 7.9445 \end{aligned}$$

21. 이차방정식 $4x^2 + 3x + 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이고, $\log_{10} 2 = t$ 라고 할 때, $\log_{10} \frac{5}{\alpha^4} + \log_{10} \frac{5}{\beta^4}$ 를 t 에 관한 식으로 나타내면?

① $5t - 2$

② $5t - 1$

③ $5t$

④ $10t - 2$

⑤ $10t + 2$

해설

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = -\frac{3}{4}$, $\alpha\beta = \frac{5}{4}$

$$\log_{10} \frac{5}{\alpha^4} + \log_{10} \frac{5}{\beta^4}$$

$$= \log_{10} \frac{5 \cdot 5}{\alpha^4 \beta^4} = \log_{10} \frac{5^2}{(\alpha\beta)^4}$$

$$= \log_{10} \frac{5^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^4} = \log_{10} \frac{2^8}{5^2}$$

$$= \log_{10} \frac{2^{10}}{5^2 \times 2^2} = \log_{10} 2^{10} - \log_{10} 10^2$$

$$= 10 \log_{10} 2 - 2 = 10t - 2$$

22. $\log x$ 의 정수 부분이 5이고 $\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. 이때 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분과 소수 부분의 곱은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$\log x$ 의 소수 부분을 α 라고 하면

$$\log x = 5 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$$

$$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(5 + \alpha) = \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 + \frac{1 + \alpha}{2}$$

이때 $0 \leq \alpha < 1$ 이므로

$$1 \leq 1 + \alpha < 2, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1 + \alpha}{2} < 1$$

따라서 $\log \sqrt{x}$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\frac{1 + \alpha}{2}$ 이다.

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\alpha + \frac{1 + \alpha}{2} = 1, \quad \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

그러므로 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분은

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

따라서 소수 부분과 정수 부분의 곱은 $\frac{4}{3}$

23. 어느 도시의 인구가 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 만에 2배가 되었다. 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 몇 % 씩 증가하였는지 구하여라. (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

10년 전 인구를 A 명이라 하고,

인구 증가율을 $a\%$ 라 하면

$$A\left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = 2A, \quad \therefore \left(1 + \frac{a}{100}\right)^{10} = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log\left(1 + \frac{a}{100}\right) = \log 2$$

$$\log\left(1 + \frac{a}{100}\right) = \frac{1}{10} \log 2 = \frac{1}{10} \times 0.3 = 0.03$$

이때 $\log 1.07 = 0.03$ 이므로

$$1 + \frac{a}{100} = 1.07 \quad \therefore a = 7$$

따라서 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 7% 씩 증가하였다.

24. $x = \frac{1}{2}(2014^{\frac{1}{n}} - 2014^{-\frac{1}{n}})$ (n 은 자연수) 일 때, $(x - \sqrt{1+x^2})^n$ 을 간단히 하면?

- ① 2014^{-1}
- ② $(-1)^n \cdot 2014$
- ③ 2014
- ④ 2014^n
- ⑤ $(-1)^n \cdot 2014^{-1}$

해설

$$x = \frac{1}{2} \left(2014^{\frac{1}{n}} - 2014^{-\frac{1}{n}} \right)$$
$$x^2 = \frac{1}{4} \left(2014^{\frac{2}{n}} + 2014^{-\frac{2}{n}} - 2 \right)$$
$$x^2 + 1 = \frac{1}{4} \left(2014^{\frac{2}{n}} + 2014^{-\frac{2}{n}} + 2 \right)$$
$$\sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(2014^{\frac{1}{n}} + 2014^{-\frac{1}{n}} \right)$$
$$\therefore x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \left(-2014^{-\frac{1}{n}} \right)$$
$$\therefore (x - \sqrt{x^2 + 1})^n = (-2014^{-\frac{1}{n}})^n = (-1)^n \cdot 2014^{-1}$$

25. 실수 a 의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$

㉡ $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$

㉢ $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 밑의 조건에서

$$a^2 - a + 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 1$$

진수의 조건에서 $a^2 + 1 \geq 1$

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있다.

㉡ (반례) $a = 0$ 일 때, 밑 $2|a| + 1 = 1$ 이므로
로그를 정의할 수 없다.

㉢ (반례) $a = 1$ 일 때, 진수 $a^2 - 2a + 1 = 0$ 이므로
로그를 정의할 수 없다.

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㉠이다.

26. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.
 $\log 2^{25} = 25 \log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250$ 이므로
 $\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250이다.
 $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771, \log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로
 $\log 3 < 0.5250 < \log 4$
 $\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$
 $\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$
따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로
 2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.