1. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -3은 -27의 세제곱근이다.

② 81의 네제곱근은 $3, -3, 3i, -3i$이다.

③ $-\sqrt[4]{81} = -3$

④ $\sqrt[4]{-16} = -2$

⑤ $\sqrt[3]{-64} = -4$

해설

④ $(-2)^4 = 16$ 이므로 $\sqrt[4]{-16} = \pm - 2$

2. $\sqrt[2014]{(-2014)^{2014}} + \sqrt[2015]{(-2015)^{2015}}$ 를 간단히 하면?

① -4017 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 4017

해설

(준식)$= |-2014| + (-2015) = -1$

3. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$를 $4^{\frac{n}{m}}$ 으로 나타낼때,$m+n$의 값은? (단,m, n은 서로소인 자연수)

① 21 ② 22 ③ 39 ④ 41 ⑤ 49

해설

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} = \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$$
$$= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$$

또한, $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = \left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}}$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^3\sqrt{4}}$$

$= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18}+\frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}}$

$\therefore m = 36, n = 13$

$\therefore m + n = 49$

4. $\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \frac{3}{8}$에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

5. $\log_3 2 = a$일 때, $\log_{\sqrt{12}} 9$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{2a+1}$ ② $\dfrac{4}{2a+1}$ ③ $\dfrac{2}{a+1}$ ④ $\dfrac{2}{a+2}$ ⑤ $\dfrac{4}{a+2}$

해설

$$\log_{\sqrt{12}} 9$$

$$= \frac{\log_3 9}{\log_3 \sqrt{12}} = \frac{2}{\frac{1}{2}\log_3(2^2 \cdot 3)}$$

$$= \frac{4}{2(\log_3 2 + 1)} = \frac{4}{2(a+1)} = \frac{2}{a+1}$$

6. $\frac{1}{2}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt{7} = a$, $\log_3 4 \cdot \log_4 \sqrt{3} = b$일 때, $a + 2b$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$$a = \log_3 \frac{3}{\sqrt{7}} + \log_3 \sqrt{7} = \log_3 3 = 1$$

$$b = \log_3 4 \cdot \log_4 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 + 1 = 2$$

7. $2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$$2^{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1}$$

$$= 2^{\sqrt{2}-1} \times 2^{-\sqrt{2}-1} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

8. $\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$ 을 계산하면?

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

해설

$(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3-1=2$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}-1$$

$(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1)=(\sqrt[3]{3})^3+1=4$ 이므로

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}+1$$

$$\therefore \left(\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}\right)^3$$

$$=(\sqrt[3]{3}-1+\sqrt[3]{3}+1)^3=(2\cdot\sqrt[3]{3})^3=24$$

9. $2^{2x}=3$ 일 때, $\dfrac{2^x+2^{-x}}{2^{3x}+2^{-3x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{2}{7}$ ③ $\dfrac{3}{8}$ ④ $\dfrac{3}{7}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x}를 곱하면

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2^{3x}+2^{-3x}}=\frac{(2^x+2^{-x})\times 2^{3x}}{(2^{3x}+2^{-3x})\times 2^{3x}}$$

$$=\frac{2^{4x}+2^{2x}}{2^{6x}+1}=\frac{(2^{2x})^2+2^{2x}}{(2^{2x})^3+1}$$

$$=\frac{3^2+3}{3^3+1}=\frac{3}{7}$$

10. 실수 $a,\ b$에 대하여 $2^a = 3,\ 2^b = 45$일 때, 2^{2a-b}의 값은?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$2^{2a-b} = 2^{2a} \cdot 2^{-b} = (2^a)^2(2^b)^{-1}$

$= 3^2 \times \frac{1}{45}$

11. 모든 실수 x에 대하여 $\log_{(k-2)^2}(kx^2+kx+1)$이 의미를 갖기 위한 정수 k의 개수는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\log_a b$에서 $a>0,\ a\neq 1, b>0$

(i) $(k-2)^2>0 \rightarrow k\neq 2$

(ii) $(k-2)^2\neq 1 \rightarrow k\neq 3,\ 1$

(ii) $kx^2+kx+1>0$

$\rightarrow k=0$ 또는 $k>0$일때, $k^2-4k<0$

$\therefore\ 0<k<4$

따라서 (i), (ii), (iii)를 만족하는 정수 k는 0

12. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2+\log_{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_{10}\left(1+\frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\log_{10} 2 \cdot (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{99})$
$= \log_{10} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99}$
$= \log_{10} 100 = 2$

13. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$을 이용하여 $\log_{10} 1.5$의 값을 계산하면?

① 0.0880　② 0.0885　③ 0.1660
④ 0.1761　⑤ 0.1777

해설

$\log_{10} 1.5 = \log_{10}(3 \times 5 \div 10)$
$= \log 3 + (1 - \log 2) - 1$
$= 0.1761$

14. 두 양수 A, $\frac{1}{A}$ 의 상용로그의 소수 부분을 각각 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\log A$ 이 정수 부분을 n이라고 하면 $\log A = \alpha + n$

$\log \frac{1}{A} = \log A^{-1} = -\log A$

$= -(n+\alpha) = -n-\alpha$

$= (-n-1)+(1-\alpha)$

따라서 $\log \frac{1}{A}$ 의 소수 부분은 $1-\alpha$ 이므로 $\beta = 1-\alpha$

$\therefore \alpha+\beta = \alpha+(1-\alpha) = 1$

15. $\log_{10} 275$ 의 값을 $\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 11 = 1.041$ 을 이용하여 계산한 다음, 소수 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2.44

해설

$\log_{10} 275 = \log_{10}^{25\times 11} = 2\log_{10}^{5} + \log_{10}^{11}$

$= 2(1 - \log_{10}^{2}) + \log_{10}^{11}$

$= 2(1 - 0.301) + 1.041$

$= 2.439$

소수 셋째 자리에서 반올림하면 2.44

16. $\log a = 0.08$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^{20}$ 은 소수점 아래 몇 째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나타나는가?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\log\left(\frac{1}{a}\right)^{20} = \log a^{-20} = -20\log a = -20\times 0.08$$

$= -1.6 = -2 + 0.4 = \bar{2}.4$

따라서 지표가 -2 이므로 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0 이 아닌 숫자가 나온다.

17. 상용로그 $\log A$의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이고, 상용로그 $\log B$의 정수 부분과 소수 부분이 이차방정식 $3x^2-4kx-3=0$의 두 근일 때, $\frac{A}{B}$의 값은? (단, k는 상수)

① $10^{-\frac{5}{6}}$ ② $10^{-\frac{1}{6}}$ ③ $10^{\frac{5}{6}}$ ④ $10^{\frac{7}{6}}$ ⑤ $10^{\frac{11}{6}}$

해설

$\log A = n+\alpha$(n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)라 하면

n과 α는 이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=-\frac{3}{2},\ n\alpha=\frac{k}{2}$

$n+\alpha=-2+\frac{1}{2}$이므로 $n=-2,\ \alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore k=2n\alpha=2\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2}=-2$

따라서 이차방정식 $3x^2+8x-3=0$에서

$(x+3)(3x-1)=0\ \ \therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

$\therefore \log B=-3+\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$

$\therefore A=10^{-\frac{3}{2}}, B=10^{-\frac{8}{3}}$

$\therefore \frac{A}{B}=10^{-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}}=10^{\frac{7}{6}}$

18. $2^x = \sqrt{3}+2$ 일 때, $\dfrac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{14}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　③ $\dfrac{3\sqrt{3}}{12}$　④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{14}$　⑤ $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

해설

$$4^x = (2^x)^2 = (\sqrt{3}+2)^2 = 7+4\sqrt{3}$$

$$4^{-x} = \frac{1}{4^x} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}$$
$$= 7-4\sqrt{3}$$

$$\frac{4^x+4^{-x}}{4^x-4^{-x}} = \frac{(7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})-(7-4\sqrt{3})}$$
$$= \frac{14}{8\sqrt{3}}$$
$$= \frac{7}{4\sqrt{3}}$$
$$= \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

19. $60^a = 3,\ 60^b = 5$일 때, $12^{\frac{(1-a-b)}{2(1-b)}}$는?

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{12}$

해설

$60^a = 3,\ 60^b = 5$에서 두 식을 곱하면 $60^{a+b} = 15$

$\dfrac{60}{60^{a+b}} = \dfrac{60}{15}$이므로 $60^{1-a-b} = 4 \cdots$ ㉠

$60^b = 5$에서 $\dfrac{60}{60^b} = \dfrac{60}{5}$이므로 $60^{1-b} = 12 \cdots$ ㉡

㉡에서 $12 = 60^{1-b},\ 12^{\frac{1}{1-b}} = 60,\ (12^{\frac{1}{1-b}})^{1-a-b} = 60^{1-a-b}$

㉠에 의해 $12^{\frac{1-a-b}{1-b}} = 4,\ (12^{\frac{1-a-b}{1-b}})^{\frac{1}{2}} = 12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}} = 4^{\frac{1}{2}}$

$\therefore 12^{\frac{(1a-b)}{2(1-b)}} = 2$

20. $\log 43.1 = 1.3645$ 일 때,
$a = \log 4310,\ \log b = -1.3655$ 라 하면, $a + 100b$ 의 값은?

① 2.9745 ② 4.0665 ③ 7.9445
④ 3.1932 ⑤ 5.5913

해설

$a = \log 4310 = \log 43.1 \times 100$
$= \log 43.1 + 2 = 3.6345$
$\log b = -1.3655 = -3 + 1.6345$
$= \log_{10} 10^{-3} + \log 43.1$
$= \log 0.0431$
$b = 0.0431$
$a + 100b = 3.6345 + 4.31$
$= 7.9445$

21. 이차방정식 $4x^2+3x+5=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고, $\log_{10}2=t$라고 할 때, $\log_{10}\dfrac{5}{\alpha^4}+\log_{10}\dfrac{5}{\beta^4}$를 t에 관한 식으로 나타내면?

① $5t-2$　　② $5t-1$　　③ $5t$

④ $10t-2$　　⑤ $10t+2$

해설

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{4},\ \alpha\beta=\dfrac{5}{4}$

$$\log_{10}\frac{5}{\alpha^4}+\log_{10}\frac{5}{\beta^4}$$

$$=\log_{10}\frac{5\cdot 5}{\alpha^4\beta^4}=\log_{10}\frac{5^2}{(\alpha\beta)^4}$$

$$=\log_{10}\frac{5^2}{\left(\dfrac{5}{4}\right)^4}=\log_{10}\frac{2^8}{5^2}$$

$$=\log_{10}\frac{2^{10}}{5^2\times 2^2}=\log_{10}2^{10}-\log_{10}10^2$$

$$=10\log_{10}2-2=10t-2$$

22. $\log x$의 정수 부분이 5이고 $\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분의 합은 1이라고 한다. 이때 $\log \sqrt{x}$의 정수 부분과 소수 부분의 곱은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$\log x$의 소수 부분을 α라고 하면

$\log x = 5 + \alpha (0 \leq \alpha < 1)$

$\log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2}(5 + \alpha) = \frac{5}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$= 2 + \frac{1 + \alpha}{2}$

이때 $0 \leq \alpha < 1$이므로

$1 \leq 1 + \alpha < 2,\ \frac{1}{2} \leq \frac{1 + \alpha}{2} < 1$

따라서 $\log \sqrt{x}$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\frac{1 + \alpha}{2}$이다.

$\log x$의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\alpha + \frac{1 + \alpha}{2} = 1,\ \frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$

그러므로 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분은

$$\frac{1 + \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$$

따라서 소수 부분과 정수 부분의 곱은 $\frac{4}{3}$

23. 어느 도시의 인구가 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 만에 2배가 되었다. 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 몇 %씩 증가하였는지 구하여라. (단, $\log 1.07 = 0.03$, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

10년 전 인구를 A명이라 하고,

인구 증가율을 $a\%$라 하면

$$A(1+\frac{a}{100})^{10} = 2A, \quad \therefore \ (1+\frac{a}{100})^{10} = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10\log(1+\frac{a}{100}) = \log 2$$

$$\log(1+\frac{a}{100}) = \frac{1}{10}\log 2 = \frac{1}{10} \times 0.3 = 0.03$$

이때 $\log 1.07 = 0.03$이므로

$$1+\frac{a}{100} = 1.07 \qquad \therefore \ a = 7$$

따라서 10년 동안 이 도시의 인구는 매년 7%씩 증가하였다.

24. $x=\frac{1}{2}(2014^{\frac{1}{n}}-2014^{-\frac{1}{n}})$($n$은 자연수) 일 때, $(x-\sqrt{1+x^2})^n$을 간단히 하면?

① 2014^{-1} ② $(-1)^n\cdot 2014$ ③ 2014

④ 2014^n ⑤ $(-1)^n\cdot 2014^{-1}$

해설

$$x=\frac{1}{2}\left(2014^{\frac{1}{n}}-2014^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$x^2=\frac{1}{4}\left(2014^{\frac{2}{n}}+2014^{-\frac{2}{n}}-2\right)$$

$$x^2+1=\frac{1}{4}\left(2014^{\frac{2}{n}}+2014^{-\frac{2}{n}}+2\right)$$

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(2014^{\frac{1}{n}}+2014^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$\therefore\ x-\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot 2\left(-2014^{-\frac{1}{n}}\right)$$

$$\therefore\ (x-\sqrt{x^2+1})^n=(-2014^{-\frac{1}{n}})^n=(-1)^n\cdot 2014^{-1}$$

25. 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의될 수 있는 것을 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\log_{a^2-a+2}(a^2+1)$ ㉡ $\log_{2|a|+1}(a^2+1)$

㉢ $\log_{a^2+2}(a^2-2a+1)$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 밑의 조건에서

$$a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$$

진수의 조건에서 $a^2+1\geq 1$

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있다.

㉡ (반례) $a=0$일 때, 밑 $2|a|+1=1$ 이므로

로그를 정의할 수 없다.

㉢ (반례) $a=1$일 때, 진수 $a^2-2a+1=0$이므로

로그를 정의할 수 없다.

따라서, 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㉠이다.

26. $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$ 일 때, 2^{25} 의 최고 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\log 2^{25}$ 의 가수를 이용하면 최고 자리의 숫자를 구할 수 있다.

$\log 2^{25} = 25 \log 2 = 25 \times 0.3010 = 7.5250$ 이므로

$\log 2^{25}$ 의 가수는 0.5250 이다.

$\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로

$\log 3 < 0.5250 < \log 4$

$\therefore 7 + \log 3 < 7.5250 < 7 + \log 4$

$\log(3 \times 10^7) < \log 2^{25} < \log(4 \times 10^7)$

따라서 $3 \times 10^7 < 2^{25} < 4 \times 10^7$ 이므로

2^{25} 의 최고 자리의 숫자는 3 이다.