

1. 두 수 48과 2 사이에 10 개의 수 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 을 넣어 12 개의 수 48, $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2$ 가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$ 의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48 이고 제 12 항이 2 인 등차수열의 첫째항부터 제 12 항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2} = 300$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 300 - (48 + 2) = 300 - 50 = 250$$

2. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$ 의 값은?

① 12

② 18

③ 24

④ 30

⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 120 \quad \therefore 2a + 9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a + 3d) + (a + 6d) = 2a + 9d = 24$$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

a_n 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$$

$$\therefore 4a + 48d = 32$$

$$a + 12d = 8$$

$$\begin{aligned} S_{25} &= \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} \\ &= \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} \\ &= 25 \times 8 = 200 \end{aligned}$$

4. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$$

$$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$$

$$\therefore a_{10} = 119 - 98 = 21$$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^n (3k - 5)$

② $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^n 2(k + 1)$

③ $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k + 1)$

④ $4 + 5 + 6 + \cdots + (n + 3) = \sum_{k=1}^n (k + 3)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k$

해설

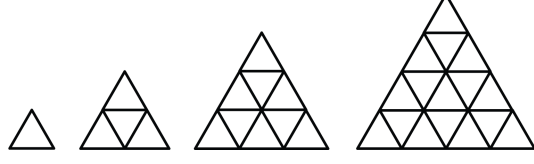
① $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 5) = \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2)$

② $2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} 2n$

③ $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1)$

⑤ $3 + 4 + 5 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n-2} (k + 2)$

6. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, ... 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6 배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



- ① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 9$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = n^2$$

$$\therefore a_6 = 36$$

7. 두 수 $2p+1$ 과 $2p+5$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2p+1$, p^2 , $2p+5$ 가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$$2p^2 = 4p+6, p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p+1)(p-3) = 0$$

따라서 $p = -1$ 또는 $p = 3$

이때, p 는 양수이므로 $p = 3$

8. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 77$$

$$a_{10} = a + 9d = 42$$

$$5d = -35$$

$$d = -7$$

$$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore a = 105$$

$$\therefore a_n = 105 + (n - 1) \times (-7)$$

$$= -7n + 112$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$112 < 7n$$

$$16 < n$$

$$\therefore n = 17$$

9. 두 수 $\frac{1}{7}$ 과 $\frac{1}{3}$ 의 사이에 세 개의 수 x, y, z 를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}, x, y, z, \frac{1}{3}$ 이 조화수열을 이루려면 $7, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, 3$ 이 등차수열을 이루어야 하므로

$$\frac{1}{x} = 6, \frac{1}{y} = 5, \frac{1}{z} = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 60(x+y+z) = 60\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 60 \cdot \frac{37}{60} = 37$$

10. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

11. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

㉠ 210 ㉡ 220 ㉢ 230 ㉣ 240 ㉤ 250

해설

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_5 = 30$, $S_{10} = 90$ 이므로

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^5 + 1)}{r - 1} = 90 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $30(r^5 + 1) = 90 \therefore r^5 = 2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15} 는

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{a(r^{15} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^{10} + r^5 + 1)}{r - 1} \\ &= 30(2^2 + 2 + 1) = 210 \end{aligned}$$

12. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로

$$2^{11} = 2048$$

$$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$$

$$n-1 \geq 11$$

$$n \geq 12$$

13. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단, $1.04^{10} = 1.48$ 로 계산한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1480만원

해설

1년후 원리합계는 $1000\text{만} \times (1.04)^1$
(10년후 원리합계)
 $= 1000\text{만} \times 1.04^{10}$
 $= 1000\text{만} \times 1.48$
 $= 1480\text{만 (원)}$

14. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ 의 값은?

- ① $\sqrt{n-1} - 1$ ② $\sqrt{n+1} - 1$ ③ $\sqrt{n+1}$
④ $\sqrt{n+1} + 1$ ⑤ $\sqrt{2n+1} + 1$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\end{aligned}$$

따라서

$$(\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+1} - 1$$

15. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{n}{2n+1}$

④ $\frac{n}{n+2}$

⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

16. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\frac{9}{10}$

② $\frac{11}{10}$

③ $\frac{10}{11}$

④ $\frac{20}{11}$

⑤ $\frac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{20}{11}$$

17. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

18. 첫째항이 2009 이고 공차 d 가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_{402} \times S_{403} < 0$ 일 때, $a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$S_{402} \times S_{403} < 0$ 에서 $S_{402} > 0, S_{403} < 0$
 $S_{402} = \frac{402}{2}(2 \times 2009 + 401d) > 0$
 $\therefore d > -10. \dots$
 $S_{403} = \frac{403}{2}(2 \times 2009 + 402d) < 0$
 $\therefore d < -9. \dots$
 d 는 정수이므로 $d = -10$ 이다.
따라서 $a_n = 2009 + (n - 1) \times (-10)$
 $a_n < 0$ 인 최초의 n 을 구하면
 $a_n = 2009 + (n - 1) \times (-10) < 0$
 $\therefore n > 201.9$
따라서 $n \leq 201$ 이면 $a_n > 0, n \geq 202$ 이면 $a_n < 0$ 이므로
 $a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값은 201 이다.

19. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉡에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

두수 a, b 에 대하여 등차중항을 A , 등비중항을 G , 조화중항을 H 라고 하면
 $A = \frac{a+b}{2}, G = \textcircled{\text{㉠}}, H = \frac{\textcircled{\text{㉡}}}{a+b}$
이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
 $A \geq G \geq H$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립), $\textcircled{\text{㉢}} = G^2$
따라서 등비중항 G 는 등차중항 A 와 조화중항 H 의 $\textcircled{\text{㉣}}$ 이며, 세 수는 $\textcircled{\text{㉤}}$ 를 이룬다.

- ① $\textcircled{\text{㉠}}$ - $\sqrt{ab}$

③ $\textcircled{\text{㉢}}$ - $A \times H$

⑤ $\textcircled{\text{㉤}}$ - 등비수열
- ② $\textcircled{\text{㉡}}$ - ab

④ $\textcircled{\text{㉣}}$ - 등비중항

해설

세 수 a, x, b 가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,
 $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, x = \frac{2ab}{a+b}$

20. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 후에는 6만 명, 20년 후에는 9만 명이 될 것으로 예상된다. 이때, A 도시의 30년 후의 인구는?
- ① 12.5만 명 ② 13만 명 ③ 13.5만 명
④ 14만 명 ⑤ 14.5만 명

해설

A 도시의 올해 인구를 a , 인구 증가율을 r 라 하면 n 년 후의 인구는 $a(1+r)^n$ 명이다.
10년 후의 인구가 6만 명이므로
 $a(1+r)^{10} = 6 \times 10^4 \dots\dots \textcircled{\small{\text{㉠}}}$
20년 후의 인구가 9만 명이므로
 $a(1+r)^{20} = 9 \times 10^4 \dots\dots \textcircled{\small{\text{㉡}}}$
 $\textcircled{\small{\text{㉠}}}$ 을 $\textcircled{\small{\text{㉡}}}$ 에 대입하면 $(1+r)^{10} = \frac{3}{2}$
30년 후의 인구는
 $a(1+r)^{30} = a(1+r)^{10} \{(1+r)^{10}\}^2$
 $60000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{270000}{2} = 135000(\text{명})$
따라서 13.5만 명이 된다.

21. 매년 초 100 만원을 연이율 5%로 은행에 적금할 때, 10년 후의 원리
합계는? (단, 이자는 1년마다 복리로 계산하고, $1.05^{10} = 1.63$)

① 163만원

② 1050만원

③ 1230만원

④ 1323만원

⑤ 1630만원

해설

원리합계 S 는

$$S = 100(1 + 0.05) + 100(1 + 0.05)^2 + \cdots + 10(1 + 0.05)^{10}$$

$$= \frac{100 \times 1.05(1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$= \frac{105(1.05^{10} - 1)}{0.05} = \frac{105(1.63 - 1)}{0.05}$$

$$= \frac{105 \times 0.63}{0.05} = 1323(\text{만원})$$

22. 다음 군수열에서 제 10군에 속하는 수들의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군
(1),	(3, 5),	(7, 9, 11),	(13, 15, 17, 19),...

- ① 1000 ② 1010 ③ 1100 ④ 1200 ⑤ 1210

해설

각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을

$\{a_n\}$ 이라 하면

$\{a_n\} : 1, 3, 7, 13, \dots$

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$\{b_n\} : 2, 4, 6, \dots$

$b_n = 2n$ 이므로 제 n 군의 첫째항 a_n 은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n + 1$$

따라서, 제 10군의 첫째항은

$$a_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$$

또한, 제 10군의 항수는 10개이고, 각 군에서

항들은 공차가 2인 등차수열을 이루므로

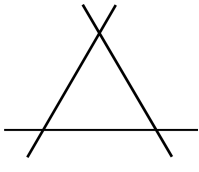
제 10군은 첫째항이 91이고 공차가 2이며

항수는 10인 등차수열이다.

따라서, 제 10군에 속하는 수들의 합은

$$\frac{10 \{91 \times 2 + (10 - 1)2\}}{2} = 1000$$

23. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n 개의 직선이 있다. n 개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n 이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$ 을 나타낸다. a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.



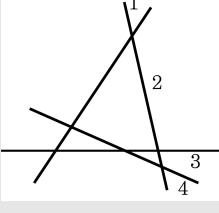
▶ 답 :

▷ 정답 : $a_{n+1} = a_n + n + 1$

해설

n 개의 직선이 있는 상황에서 직선 하나가 늘어날 때 추가되는 평면의 개수를 구한다.

3개의 직선이 있는 상태에서 직선이 하나 추가되면 새로운 직선이 3개의 직선과 각각 만나 오른쪽 그림과 같이 4개의 평면이 새로 생긴다. 같은 방법으로 n 개의 직선이 있는 상태에서 직선 하나를 추가하면 추가된 직선은 기존의 n 개의 직선과 모두 만나 새로운 평면 $n + 1$ 개를 만드므로 $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$ 이 성립한다.



24. 다음과 같이 1보다 작은 유리수를 규칙적으로 나열한 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.
- $$\{a_n\} : \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$
- 또, 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항 중에서 분자와 분모의 합이 홀수인 분수만 뽑아 순서대로 나열한 수열을 $\{b_n\}$ 이라 하자.
- $$\{b_n\} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$
- 이 때, $a_{60} = b_k$ 를 만족하는 자연수 k 의 값은?

- ① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

해설

수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 군수열로 나누자.

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \dots$$

10군까지의 항의 개수는 $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ 이므로 60번째 항은 제 11군의 5번째항이다.

$$\therefore a_{60} = \frac{5}{12}$$

한편, 수열 $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 군수열로 나누자.

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \dots$$

이 때, $\frac{5}{12}$ 는 제 11군의 3번째 항이고, 제 10군까지의 모든 항의 개수는

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 30$$

이므로 $\frac{5}{12}$ 는 수열 $\{b_n\}$ 의 제 33항이다.

$$\therefore k = 33$$

25. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$ 이고, $a_{n+3} = a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 두 번째로 나오는 30은 제 몇 항인가?

① 제 84 항

② 제 85 항

③ 제 86 항

④ 제 87 항

⑤ 제 88 항

해설

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$

$a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 4, \dots$

와 같이 진행되는 수열이다.

30이 두번째로 나오는 것은

$3 \cdot (30 - 1) + 1$ 번째 이므로

제 88 항