1. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 a_1, a_2, $\cdots$,a_{10}을 넣어 12개의 수 48, a_1, a_2, $\cdots$,a_{10}, 2가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 200 ② 250 ③ 300 ④ 350 ⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\dfrac{12(48+2)}{2}=300$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=300-(48+2)=300-50=250$

2. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$\frac{10(2a+9d)}{2} = 120 \quad \therefore \; 2a + 9d = 24$$

$$a_4 + a_7 = (a+3d) + (a+6d) = 2a + 9d = 24$$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_6 + a_{11} + a_{15} + a_{20} = 32$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25}$ 의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 200

해설

a_n 의 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a + 5d + a + 10d + a + 14d + a + 19d = 32$

$\therefore 4a + 48d = 32$

$a + 12d = 8$

$$S_{25} = \frac{25 \cdot (2a + 24d)}{2} = \frac{25 \cdot 2 \cdot (a + 12d)}{2} = 25 \times 8 = 200$$

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2n - 1$일 때, a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$a_{10} = S_{10} - S_9$
$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$
$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$
$\therefore\ a_{10} = 119 - 98 = 21$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n}(3k-5)$

② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n}2(k+1)$

③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$

④ $4+5+6+\cdots+(n+3)=\sum_{k=1}^{n}(k+3)$

⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k$

해설

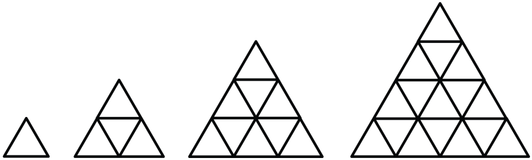
① $1+4+7+\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$

② $2+4+6+\cdots+2(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1}2n$

③ $3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$

⑤ $3+4+5+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n-2}(k+2)$

6. 정삼각형 모양의 타일을 이용하여 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 처음 삼각형의 한 변의 길이의 2배, 3배, 4배, $\cdots$ 인 정삼각형 모양을 계속하여 만든다. 한 변의 길이가 처음 정삼각형의 한 변의 길이의 6배인 정삼각형을 만들 때, 필요한 타일의 개수는?



① 30개 ② 32개 ③ 34개 ④ 36개 ⑤ 38개

해설

타일의 개수를 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 9$

$\vdots$

$\therefore a_n = n^2$

$\therefore a_6 = 36$

7. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

8. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 77$

$a_{10} = a + 9d = 42$

$5d = -35$

$d = -7$

$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore \ a = 105$

$$\begin{aligned}\therefore \ a_n &= 105 + (n-1) \times (-7) \\ &= -7n + 112\end{aligned}$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n의 최솟값을 구하면

$112 < 7n$

$16 < n$

$\therefore n = 17$

9. 두 수 $\frac{1}{7}$과 $\frac{1}{3}$의 사이에 세 개의 수 x, y, z를 넣어 다섯 개의 수 $\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 이 순서로 조화수열을 이루도록 할 때, $60(x+y+z)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

$\frac{1}{7}$, x, y, z, $\frac{1}{3}$이 조화수열을 이루려면 7, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, 3이 등차수열을 이루어야 하므로

$\frac{1}{x}=6$, $\frac{1}{y}=5$, $\frac{1}{z}=4$

$\therefore\ x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{5}$, $z=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60(x+y+z)=60\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=60\cdot\frac{37}{60}=37$

10. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)

$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$

$= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} - \frac{7(105 + 195)}{2}$

$= 47 \cdot 150$

$\therefore \frac{1}{150}S = 47$

11. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90 인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

해설

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5 = 30,\ S_{10} = 90$이므로

$$S_5 = \frac{a(r^5-1)}{r-1} = 30 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1} = 90 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $30(r^5+1) = 90 \quad \therefore r^5 = 2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15}는

$$S_{15} = \frac{a(r^{15}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1}$$

$$= 30(2^2+2+1) = 210$$

12. 첫째항이 1이고, 공비가 2인 등비수열에서 처음으로 2000보다 크게 되는 항은 몇 번째 항인가?

① 11항 ② 12항 ③ 13항 ④ 14항 ⑤ 15항

해설

$a_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} > 2000$ 인 자연수의
최솟값을 구하면 된다.
그런데 $2^{10} = 1024$ 이므로
$2^{11} = 2048$
$\therefore 2^{n-1} \geq 2^{11}$
$n - 1 \geq 11$
$n \geq 12$

13. 다현이가 1000만원을 연이율 4%의 복리로 10년간 은행에 맡겼을 때 원리합계를 구하여라. (단. $1.04^{10} = 1.48$로 계산한다.)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1480만원

해설

1년후 원리합계는 1000만 $\times (1.04)^1$

(10년후 원리합계)

$= 1000$만$\times 1.04^{10}$

$= 1000$만 $\times 1.48$

$= 1480$만(원)

14. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1}-1$ ② $\sqrt{n+1}-1$ ③ $\sqrt{n+1}$

④ $\sqrt{n+1}+1$ ⑤ $\sqrt{2n+1}+1$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

따라서

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$= \sqrt{n+1}-1$

15. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{n+1}$ ② $\dfrac{2n}{n+1}$ ③ $\dfrac{n}{2n+1}$

④ $\dfrac{n}{n+2}$ ⑤ $\dfrac{2n}{2n+1}$

해설

(준 식)$= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\right\}$

$+ \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{n}{2n+1}$

16. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$　② $\dfrac{11}{10}$　③ $\dfrac{10}{11}$　④ $\dfrac{20}{11}$　⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

17. $a_1 = 3,\ a_2 = \dfrac{3}{7},\ \dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+2}}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n < \dfrac{1}{50}$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+2}}$이므로 수열 $\dfrac{1}{a_n}$은 등차수열을 이룬다. 등차수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 공차를 d라 하면 $d = \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$의 일반항 $\dfrac{1}{a_n}$은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1)\cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$\dfrac{3}{6n-5} < \dfrac{1}{50}$에서 $n \geq 25.\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 26이다.

18. 첫째항이 2009이고 공차 d가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{402} \times S_{403} < 0$일 때, $a_n \times a_{n+1} < 0$을 만족하는 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$S_{402} \times S_{403} < 0$에서 $S_{402} > 0,\ S_{403} < 0$

$$S_{402} = \frac{402}{2}(2 \times 2009 + 401d) > 0$$

$\therefore\ d > -10.\cdots$

$$S_{403} = \frac{403}{2}(2 \times 2009 + 402d) < 0$$

$\therefore\ d < -9.\cdots$

d는 정수이므로 $d = -10$이다.

따라서 $a_n = 2009 + (n-1) \times (-10)$

$a_n < 0$인 최초의 n을 구하면

$a_n = 2009 + (n-1) \times (-10) < 0$

$\therefore\ n > 201.9$

따라서 $n \leq 201$이면 $a_n > 0,\ n \geq 202$이면 $a_n < 0$이므로

$a_n \times a_{n+1} < 0$을 만족하는 n의 값은 201이다.

19. 다음은 등차중항과 등비중항, 조화중항 사이의 관계를 설명한 내용이다. ㉠ ㉤에 들어갈 내용이 알맞지 않은 것은?

> 두수 a, b에 대하여 등차중항을 A, 등비중항을 G, 조화중항을 H라고 하면
> $A=\dfrac{a+b}{2}$, $G=$㉠, $H=\dfrac{㉡}{a+b}$
> 이때 세 수의 관계는 다음과 같다.
> $A \geq G \geq H$(단, 등호는 $a=b$일 때 성립), ㉢ $=G^2$
> 따라서 등비중항 G는 등차중항 A와 조화중항 H의 ㉣이며, 세 수는 ㉤를 이룬다.

① (㉠) - $\sqrt{ab}$

② (㉡) - ab

③ (㉢) - $A\times H$

④ (㉣) - 등비중항

⑤ (㉤) - 등비수열

해설

세 수 a, x, b가 이 순서로 조화수열을 이룰 때,

$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, $x=\dfrac{2ab}{a+b}$

20. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10년 후에는 6만 명, 20년 후에는 9만 명이 될 것으로 예상된다. 이때, A 도시의 30년 후의 인구는?

① 12.5만 명　② 13만 명　③ 13.5만 명
④ 14만 명　⑤ 14.5만 명

해설

A 도시의 올해 인구를 a, 인구 증가율을 r라 하면 n년 후의 인구는
$a(1+r)^n$ 명이다.
10년 후의 인구가 6만 명이므로
$a(1+r)^{10}=6\times 10^4$ ⋯⋯ ㉠
20년 후의 인구가 9만 명이므로
$a(1+r)^{20}=9\times 10^4$ ⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $(1+r)^{10}=\dfrac{3}{2}$
30년 후의 인구는
$a(1+r)^{30}=a(1+r)^{10}\left\{(1+r)^{10}\right\}^2$
$60000\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{270000}{2}=135000$(명)
따라서 13.5만 명이 된다.

21. 매년 초 100만원을 연이율 5%로 은행에 적금할 때, 10년 후의 원리합계는? (단, 이자는 1년마다 복리로 계산하고, $1.05^{10} = 1.63$)

① 163만원 ② 1050만원 ③ 1230만원

④ 1323만원 ⑤ 1630만원

해설

원리합계 S는

$$S = 100(1+0.05) + 100(1+0.05)^2 + \cdots + 10(1+0.05)^{10}$$

$$= \frac{100 \times 1.05(1.05^{10} - 1)}{1.05 - 1}$$

$$= \frac{105(1.05^{10} - 1)}{0.05} = \frac{105(1.63 - 1)}{0.05}$$

$$= \frac{105 \times 0.63}{0.05} = 1323(\text{만원})$$

22. 다음 군수열에서 제 10군에 속하는 수들의 합은?

제1군	제2군	제3군	제4군	
(1),	(3, 5),	(7, 9, 11),	(13, 15, 17, 19),	$\cdots$

① 1000 ② 1010 ③ 1100 ④ 1200 ⑤ 1210

해설

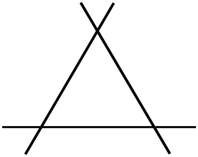
각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을
$\{a_n\}$이라 하면
$\{a_n\}$: 1, 3, 7, 13, $\cdots$
수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면
$\{b_n\}$: 2, 4, 6, $\cdots$
$b_n = 2n$이므로 제n군의 첫째항 a_n은

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n + 1$$

따라서, 제 10군의 첫째항은
$a_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$
또한, 제 10군의 항수는 10개이고, 각 군에서
항들은 공차가 2인 등차수열을 이루므로
제 10군은 첫째항이 91이고 공차가 2이며
항수는 10인 등차수열이다.
따라서, 제 10군에 속하는 수들의 합은

$$\frac{10\left\{91 \times 2 + (10-1)2\right\}}{2} = 1000$$

23. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n개의 직선이 있다. n개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$을 나타낸다. a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.



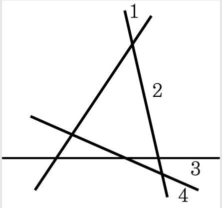
▶ 답 :

▷ 정답 : $a_{n+1} = a_n + n + 1$

해설

n개의 직선이 있는 상황에서 직선 하나가 늘어날 때 추가되는 평면의 개수를 구한다.

3개의 직선이 있는 상태에서 직선이 하나 추가되면 새로운 직선이 3개의 직선과 각각 만나 오른쪽 그림과 같이 4개의 평면이 새로 생긴다. 같은 방법으로 n개의 직선이 있는 상태에서 직선 하나를 추가하면 추가된 직선은 기존의 n개의 직선과 모두 만나 새로운 평면 $n+1$개를 만드므로 $a_{n+1} = a_n + (n+1)$이 성립한다.



24. 다음과 같이 1보다 작은 유리수를 규칙적으로 나열한 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$\{a_n\} : \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$$

또, 수열 $\{a_n\}$의 각 항 중에서 분자와 분모의 합이 홀수인 분수만 뽑아 순서대로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 하자.

$$\{b_n\} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$$

이 때, $a_{60} = b_k$를 만족하는 자연수 k의 값은?

① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

해설

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 군수열로 나누자.

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \cdots$$

10군까지의 항의 개수는 $1+2+3+\cdots+10 = 55$이므로 60 번째 항은 제 11군의 5번째항이다.

$$\therefore a_{60} = \frac{5}{12}$$

한편, 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 군수열로 나누자.

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \cdots$$

이 때, $\frac{5}{12}$는 제 11군의 3번째 항이고, 제 10군까지의 모든 항의 개수는

$1+1+2+2+3+3+3+4+4+5+5 = 30$이므로 $\frac{5}{12}$는 수열 $\{b_n\}$의 제 33항이다.

$$\therefore k = 33$$

25. $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$이고, $a_{n+3} = a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에서 두 번째로 나오는 30은 제 몇 항인가?

① 제 84항 ② 제 85항 ③ 제 86항

④ 제 87항 ⑤ 제 88항

해설

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$

$a_4 = 2,\ a_5 = 3,\ a_6 = 4, \cdots$

와 같이 진행되는 수열이다.

30이 두번째로 나오는 것은

$3 \cdot (30 - 1) + 1$번째 이므로

제 88항