

1. 함수 $y = \frac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

- ① 점근선 중 하나는 $x = 3$ 이다.
- ② 점근선 중 하나는 $y = 2$ 이다.
- ③ 함수 $y = \frac{2}{x} + 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.
- ④ 이 그래프는 x 축을 지나지 않는다.
- ⑤ 함수 $y = \frac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y = \frac{2x-4}{x-3} = \frac{2(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x = 3$, $y = 2$ 이고

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼,

y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

2. 다음 보기 중 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = \frac{x}{x+1}$

㉡ $y = \frac{2-x}{x-1}$

㉢ $y = \frac{2x-3}{x-2}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이다.

㉠ $y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 1$

㉡ $y = \frac{2-x}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1$

㉢ $y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 2$

따라서, 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

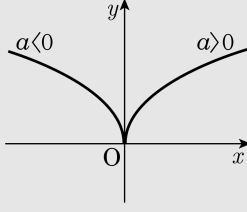
겹칠 수 있는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

3. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.
- ② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.
- ③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.
- ④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.
- ⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때의 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수 있다.
그러나 $a > 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$
 $a < 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이므로
①은 틀린 것이다.



4. $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축으로 m 만큼 y 축으로 n 만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$ 과 일치한다. $n - m$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$ 이므로
 $y = \sqrt{2x}$ 를 x 축으로 -3만큼
 y 축으로 -2만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
 $\therefore n - m = 1$

5. $y = \sqrt{4x-12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

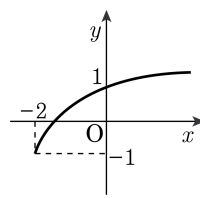
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3, \beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

6. 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c 는 상수)



- ① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$
 ③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2}, 0)$
 ⑤ $(-\sqrt{3}, 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$ 의 그래프는

함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로

c 만큼 평행 이동시킨 것이므로

$$b = 2, c = -1$$

$$\therefore y = a\sqrt{x+b} + c = a\sqrt{x+2} - 1$$

한편, 이 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a\sqrt{0+2} - 1$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$ 의 그래프와

x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}$$

7. $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

따라서, 분수함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax + 1$, $y = bx + 1$ 은 a , b 의 값에

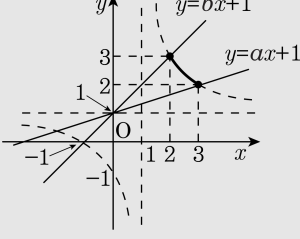
관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립하려면 다음

그림에서 $a \leq \frac{1}{3}$, $b \geq 1$

따라서, a 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b 의

최솟값은 1이므로 그 합은 $\frac{4}{3}$



8. 분수함수 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- I. $f(0) = g(0) = -1$
- II. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.
- III. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

- ① I
- ② I, II
- ③ I, III
- ④ II, III
- ⑤ I, II, III

해설

- I. $f(0) = -1, g(0) = \frac{1}{f(0)} = -1$
 $\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>
- II. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로
$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$
$$= \frac{x+1}{x-1}$$
$$= \frac{1}{f(x)}$$
$$= g(x)$$
 -<참>
- III. $y = f(x-1) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$
따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$
 $y = g(x+1) = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$
따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>
따라서 옳은 것은 (I), (II), (III) 이다.

9. 분수함수 $f(x) = \frac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\frac{22}{5}$

해설

$$y = \frac{ax+5}{bx+c} \text{에서}$$

$$\text{점근선 } x = -\frac{c}{b} = \frac{1}{2}, y = \frac{a}{b} = -\frac{1}{3}$$

$(1, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{a+5}{b+c}$$

$$2c = -b, 3a = -b, c = -3$$

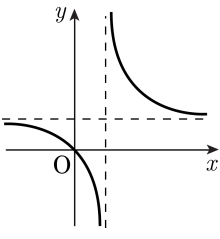
$$\therefore y = \frac{-2x+5}{6x-3}$$

$$y^{-1} = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$g(x) = \frac{3x+5}{6x+2}$$

$$\therefore g(0) = \frac{5}{2}$$

10. 다음 그림은 분수함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



- ①

③

⑤

②

④

해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로
 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 에서 $a < 0, c > 0$
 그리고 원점을 지나므로
 $\frac{b}{a} + c = 0, b = -ac > 0$
 $\therefore y = -\sqrt{bx+c} + a$
 꼭짓점 $(-\frac{c}{b}, a), (-\frac{c}{b} < 0, a < 0)$
 루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

11. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y = g(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B라 할 때 선분 AB의 길이는?

- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$$\frac{x+2}{x-1} = x, \quad x+2 = x^2 - x$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$A(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), B(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

$$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

12. 두 함수 f, g 가 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ 일 때, $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

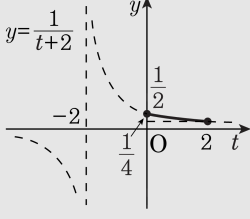
- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}\end{aligned}$$

$\sqrt{x} = t$ 로 놓으면
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $0 \leq t \leq 2$ 이므로
주어진 함수는 $y = \frac{1}{t+2} (0 \leq t \leq 2)$

따라서 다음 그림에서 $t = 0$ 일 때
최댓값은 $\frac{1}{2}$,
 $t = 2$ 일 때
최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이므로
구하는 합은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



13. 함수 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내면 ?

- ① $\frac{2f(x)}{2f(x)-1}$ ② $\frac{2f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\frac{2f(x)}{f(x)-1}$
 ④ $\frac{2f(x)}{f(x)+1}$ ⑤ $\frac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{x-1} \text{ 에서 } x = \frac{f(x)}{f(x)-1} \\ 2x &= \frac{2f(x)}{f(x)-1} \\ f(2x) &= f\left(\frac{2f(x)}{f(x)-1}\right) = \frac{\frac{2f(x)}{f(x)-1}}{\frac{2f(x)}{f(x)-1}-1} \\ &= \frac{2f(x)}{2f(x)-f(x)+1} = \frac{2f(x)}{f(x)+1} \end{aligned}$$

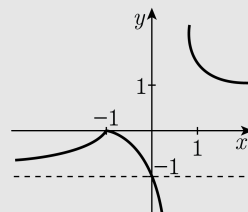
14. 유리함수 $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프와 $y = a$ 의 그래프의 교점이 2개가 되게 하는 a 값의 범위를 구하면?

- ① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 1$
 ④ $-1 < a < 0$ ⑤ $-1 < a < 1$

해설

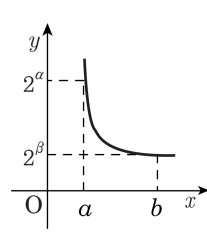
$y = \frac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프를
 그려보면

$\therefore y = a$ 와 교점이 두 개가 되려면 $-1 < a < 0$



15. 함수 $y = f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $ab = 16$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4
 ④ -3 ⑤ -2



해설

$f(x) = \frac{1}{2x}$ 의 그래프에서

$$f(a) = \frac{1}{2a} = 2^\alpha, f(b) = \frac{1}{2b} = 2^\beta$$

$f(a)$ 와 $f(b)$ 를 곱하면

$$f(a) \times f(b) = \frac{1}{2a} \times \frac{1}{2b} = 2^{\alpha+\beta}$$

$$\therefore 2^{\alpha+\beta} = \frac{1}{4ab} = \frac{1}{4 \times 16} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$

16. 함수 $f(x)$ 가 역함수 $g(x)$ 를 갖고 $f(1) = 1$, $g(\sqrt{x+a}-1) = x+b$ 일 때 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

g 가 f 의 역함수이므로 $g = f^{-1}$
 $f^{-1}(\sqrt{x+a}-1) = x+b$ 에서
 $\sqrt{x+a}-1 = f(x+b)$
양변에 x 대신 $x-b$ 를 대입하면
 $\sqrt{(x-b)+a}-1 = f(x-b+b)$
 $\therefore f(x) = \sqrt{x+a-b}-1$
 $f(1) = 1$ 이므로
 $f(1) = \sqrt{1+a-b}-1 = 1$
 $\sqrt{1+a-b} = 2, 1+a-b = 4$
 $\therefore a-b = 3$

17. 두 함수 $f(x) = \sqrt{2(x-1)}$, $g(x) = x+k$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $f(x) \leq g(x)$ 이면 $k \geq -\frac{1}{2}$ 이다.
- ㉡ $k = \frac{1}{8}$ 이면 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 해는 0 개이다.
- ㉢ $k < -1$ 이면 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 해는 양수이다.

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ : $\sqrt{2(x-1)} \leq x+k$
 $x^2 + 2(k-1)x + k^2 + 2 \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 + 2) \leq 0$
 $k \geq -\frac{1}{2} \cdots$ 참

㉡ : ㉠에서 $k = \frac{1}{8}$ 이면
 $\frac{D}{4} < 0 \cdots$ 해는 0개 .. 참

㉢ : ㉠에서 두근의 합이 $-2(k-1)$ 로 $k < -1$ 이면 양수이고,
 $\frac{D}{4} > 0$ 이므로 2개의 실근을 가지므로 참이다.