1. 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y=\frac{2x-4}{x-3}=\frac{2(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x=3,\ y=2$이고

$y=\dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

2. 다음 보기 중 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=\dfrac{x}{x+1}$	㉡ $y=\dfrac{2-x}{x-1}$	㉢ $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y=\dfrac{1}{x-p}+q$ 의 꼴이다.

㉠ $y=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1-1}{x+1}=\dfrac{-1}{x+1}+1$

㉡ $y=\dfrac{2-x}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$

㉢ $y=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{2(x-2)+1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+2$

따라서, 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

3. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

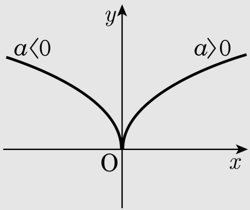
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때의 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.

그러나 $a > 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

$a < 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이므로 ①은 틀린 것이다.

4. $y = \sqrt{2x}$의 그래프를 x축으로 m만큼 y축으로 n만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$과 일치한다. $n - m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$이므로
$y = \sqrt{2x}$를 x축으로 -3만큼
y축으로 -2 만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
$\therefore n - m = 1$

5. $y=\sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

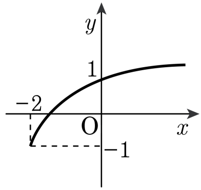
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha=3$, $\beta=5$
$\therefore\ \alpha+\beta=8$

6. 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c 는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$

③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2},\ 0)$

⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b = 2$, $c = -1$
$\therefore\ y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$

$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x+2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x = -\frac{3}{2}$$

7. $2 \le x \le 3$ 에서 부등식 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le bx+1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+2}{x-1}=\frac{2}{x-1}+1$$

따라서, 분수함수 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y=\dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

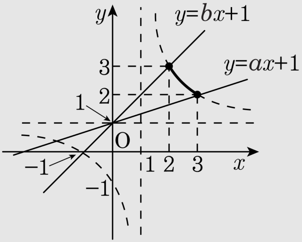
두 직선 $y=ax+1,\ y=bx+1$ 은 $a,\ b$ 의 값에

관계없이 점 $(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \le x \le 3$ 에서 $ax+1 \le \dfrac{x+1}{x-1} \le$

$bx+1$ 이 항상 성립하려면 다음

그림에서 $a \le \dfrac{1}{3},\ b \ge 1$



따라서, a 의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$, b 의

최솟값은 1 이므로 그 합은 $\dfrac{4}{3}$

8. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $f(0) = g(0) = -1$

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.

Ⅲ. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① Ⅰ ② Ⅰ, Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ

④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0) = -1,\ g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$$y = f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{f(x)}$$

$= g(x)$ -<참>

Ⅲ. $y = f(x-1) = \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$

$y = g(x+1) = \dfrac{x+2}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$

따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

9. 분수함수 $f(x)=\dfrac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\dfrac{22}{5}$

해설

$y=\dfrac{ax+5}{bx+c}$ 에서

점근선 $x=-\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{3}$

$(1,\ 1)$ 을 지나므로

$1=\dfrac{a+5}{b+c}$

$2c=-b,\ 3a=-b,\ c=-3$

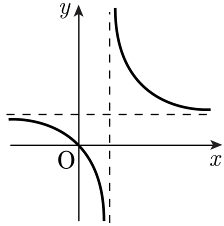
$\therefore y=\dfrac{-2x+5}{6x-3}$

$y^{-1}=\dfrac{3x+5}{6x+2}$

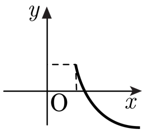
$g(x)=\dfrac{3x+5}{6x+2}$

$\therefore\ g(0)=\dfrac{5}{2}$

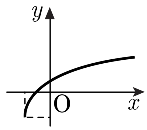
10. 다음 그림은 분수함수 $y = \dfrac{b}{x+a} + c$ 의 그래프의 개형이다. 다음 중 무리함수 $y = a - \sqrt{bx+c}$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



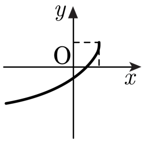
①



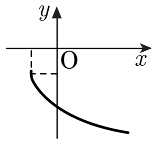
②



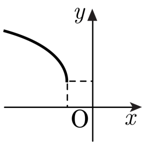
③



④



⑤



해설

점근선이 $x =$ 양수, $y =$ 양수 이므로

$y = \dfrac{b}{x+a} + c$에서 $a < 0,\ c > 0$

그리고 원점을 지나므로

$\dfrac{b}{a} + c = 0,\ b = -ac > 0$

$\therefore\ y = -\sqrt{bx+c} + a$

꼭짓점 $\left(-\dfrac{c}{b},\ a\right),\ \left(-\dfrac{c}{b} < 0, a < 0\right)$

루트 앞의 부호가 음수이므로 그래프의 개형은 ④이다.

11. 함수 $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y = g(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B 라 할 때 선분 AB 의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$\dfrac{x+2}{x-1} = x,\ x + 2 = x^2 - x$

$x^2 - 2x - 2 = 0,\ x = 1 \pm \sqrt{3}$ 이므로

$\mathrm{A}(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}),\ \mathrm{B}(1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$

12. 두 함수 f, g 가 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x}+1$ 일 때, $0 \le x \le 4$ 에서 함수 $y=(f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}+1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+2}
\end{aligned}
$$

$\sqrt{x}=t$ 로 놓으면

$0 \le x \le 4$ 에서 $0 \le t \le 2$ 이므로

주어진 함수는 $y=\dfrac{1}{t+2}(0 \le t \le 2)$

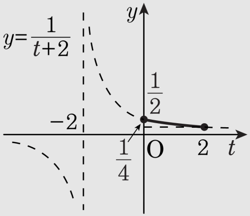
따라서 다음 그림에서 $t=0$ 일 때

최댓값은 $\dfrac{1}{2}$,

$t=2$ 일 때

최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이므로

구하는 합은 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$



13. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 $f(2x)$를 $f(x)$로 나타내면 ?

① $\dfrac{2f(x)}{2f(x)-1}$ ② $\dfrac{2f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}$

④ $\dfrac{2f(x)}{f(x)+1}$ ⑤ $\dfrac{2f(x)}{f(x)-2}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$2x=\frac{2f(x)}{f(x)-1}$$

$$f(2x)=f\left(\frac{2f(x)}{f(x)-1}\right)=\frac{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}}{\dfrac{2f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$=\frac{2f(x)}{2f(x)-f(x)+1}=\frac{2f(x)}{f(x)+1}$$

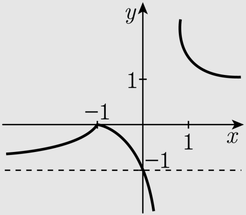
14. 유리함수 $y = \dfrac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프와 $y = a$ 의 그래프의 교점이 2개가 되게 하는 a값의 범위를 구하면?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $0 < a < 1$

④ $-1 < a < 0$ ⑤ $-1 < a < 1$

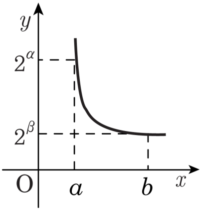
해설

$y = \dfrac{|x+1|}{x-1}$ 의 그래프를 그려보면



$\therefore y = a$와 교점이 두 개가 되려면 $-1 < a < 0$

15. 함수 $y=f(x)=\dfrac{1}{2x}$ 의 그래프가 다음 그림과 같고, $ab=16$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?



① -6 ② -5 ③ -4

④ -3 ⑤ -2

해설

$f(x)=\dfrac{1}{2x}$ 의 그래프에서

$f(a)=\dfrac{1}{2a}=2^{\alpha}$, $f(b)=\dfrac{1}{2b}=2^{\beta}$

$f(a)$ 와 $f(b)$를 곱하면

$f(a)\times f(b)=\dfrac{1}{2a}\times\dfrac{1}{2b}=2^{\alpha+\beta}$

$\therefore\ 2^{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{4ab}=\dfrac{1}{4\times16}=\dfrac{1}{2^{6}}=2^{-6}$

$\therefore\ \alpha+\beta=-6$

16. 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖고 $f(1)=1$, $g(\sqrt{x+a}-1)=x+b$일 때 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

g가 f의 역함수이므로 $g=f^{-1}$

$f^{-1}(\sqrt{x+a}-1)=x+b$에서

$\sqrt{x+a}-1=f(x+b)$

양변에 x 대신 $x-b$를 대입하면

$\sqrt{(x-b)+a}-1=f(x-b+b)$

$\therefore\ f(x)=\sqrt{x+a-b}-1$

$f(1)=1$이므로

$f(1)=\sqrt{1+a-b}-1=1$

$\sqrt{1+a-b}=2, 1+a-b=4$

$\therefore\ a-b=3$

17. 두 함수 $f(x) = \sqrt{2(x-1)}$, $g(x) = x+k$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $f(x) \le g(x)$ 이면 $k \ge -\frac{1}{2}$ 이다.

ㄴ $k = \frac{1}{8}$ 이면 x에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 해는 0 개이다.

ㄷ $k < -1$ 이면 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 해는 양수이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ : $\sqrt{2(x-1)} \le x+k$

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 + 2 \ge 0 \cdots\cdots ①$

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2+2) \le 0$

$k \ge -\frac{1}{2}$ ∴ 참

ㄴ :ㄱ에서 $k = \frac{1}{8}$ 이면

$\frac{D}{4} < 0$ ∴ 해는 0개 ∴ 참

ㄷ :①에서 두근의 합이 $-2(k-1)$로 $k < -1$ 이면 양수이고,

$\frac{D}{4} > 0$이므로 2개의 실근을 가지므로 참이다.