1. 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$ ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

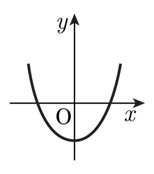
$x > 0$이므로

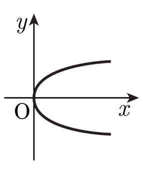
$8x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$

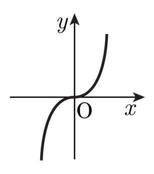
$\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$

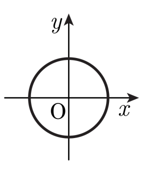
(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$일 때 성립)

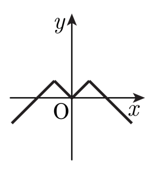
2. 다음 중에서 함수의 그래프가 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

3. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$　　㉡ $g(x) = x^2$

㉢ $h(x) = -x$　　㉣ $k(x) = |x|$

① 4 개　② 3 개　③ 2 개　④ 1 개　⑤ 없다

해설

이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응,
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2 개

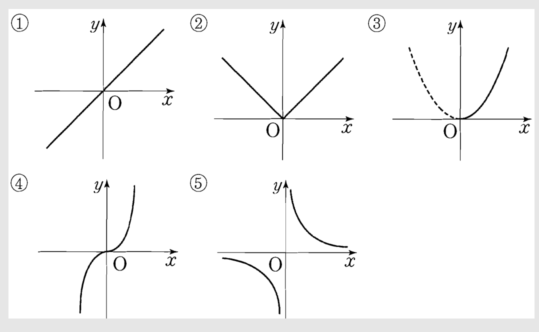
4. 다음 함수 중 역함수가 존재하지 않는 것은 무엇인가?

① $y = x$　　② $y = |x|$　　③ $y = x^2\ (x \geq 0)$

④ $y = x^3$　　⑤ $y = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$

해설

역함수가 존재할 필요충분조건은
함수가 일대일대응인 것이다.
따라서, 일대일대응이 아닌 함수의 그래프는
②이다.



5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

ㄱ $f \circ g = g \circ f$

ㄴ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

ㄷ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

ㄹ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄹ　③ ㄷ, ㄹ　④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

ㄱ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
$\therefore$ 옳지 않다.

ㄴ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
$\therefore$ 옳다.

ㄷ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
$\therefore$ 옳지 않다.

ㄹ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
$\therefore g = f^{-1}$ $\therefore$ 옳다.

6. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -x + 5$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(a) = 1$이 성립할 때 상수 a의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = 1$에서
$f(g^{-1}(a)) = 1$ $f(1) = 1$이므로
$\therefore g^{-1}(a) = 1$에서 $a = g(1) = 4$

7. $x>0,\ y>0$ 일 때, $4x+y+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

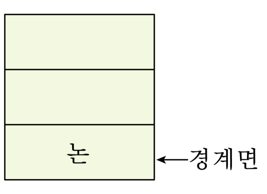
$x>0,\ y>0$ 일 때 $4x+y \geq 2\sqrt{4xy}$ 이므로

$$4x+y+\frac{1}{\sqrt{xy}} \geq 2\sqrt{4xy}+\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\geq 2\sqrt{4\sqrt{xy}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}}=4$$

$\therefore\ 4x+y+\dfrac{1}{\sqrt{xy}} \geq 4$, 최솟값 4

8. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m^2인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



① 70만원　② 71만원　③ 72만원　④ 73만원　⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x라 하면

가로의 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$3\times 2x+3\times \frac{27}{x}\times 2+\frac{27}{x}\times 2$

$=6x+\frac{162}{x}+\frac{54}{x}$

$=6x+\frac{216}{x}$

$\geq 2\sqrt{6x\cdot \frac{216}{x}}$

$=2\sqrt{1296}=2\times 36=72$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

9. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x - 2y + 3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x - 2y + 3z)^2$

$= \left\{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\right\}$

$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \le 144$

$\therefore\ -12 \le x - 2y + 3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$

즉, $x = -y = \pm 2$일 때 등식이 성립한다.

10. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$가 있다. 함수 $f : X \to Y$ 가 임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가 상수가 될 때, 이를 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 3 개 ② 5 개 ③ 7 개 ④ 9 개 ⑤ 11 개

해설

임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x) = k$
(단, k 는 상수)를 만족시킨다고 하면
$x = -1$ 일 때, $-f(-1) = k$
$x = 0$ 일 때, $0 \cdot f(0) = k$
$\therefore\ k = 0$
$x = 1$ 일 때, $f(1) = k$ 에서
$f(-1) = f(1) = 0$ 임을 알 수 있다.
따라서, 집합 X 에서 Y 로의 함수 중
임의의 $x \in X$ 에 대하여 $xf(x)$ 가
상수가 되려면 -1 이 대응할 수 있는
원소 0 의 1 가지 0 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는 0 의 1 가지
$\therefore\ 1 \times 5 \times 1 = 5$ (개)

11. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$
$\therefore a + b = 2$

12. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$
한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면
$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$
$\therefore\ h(1) = -2$

13. 실수에서 정의된 함수 $f(x) = ax-3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립하도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f^{-1} = f$ 에서 $f^{-1}(x) = f(x)$, $f(f(x)) = x$

$f(f(x)) = f(ax-3) = a(ax-3)-3 = x$

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$\therefore\ a^2 = 1,\ -3a-3 = 0$

$\therefore\ a = -1$

14. $f(x)=\begin{cases} x(x\le 0) \\ x^2(x>0)\end{cases}$, $g(x)=f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x)=g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$h(0)=g^{-1}(0)=k$
$g(k)=f(k+4)=0$
$\therefore\ k+4=0$
$\therefore\ k=-4$
$\therefore\ h(0)=-4$

15. 자연수 n에 대하여 n^2을 오진법으로 표시했을 때 일의 자리수를 $f(n)$이라 하자. <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

㉠ $f(3) = 4$

㉡ $0 \le f(n) \le 4$

㉢ $f(n) = 2$인 자연수 n은 없다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f(3)$은 3^2을 오진법으로 표시한
일의 자리수이므로 $3^2 = 5 \times 1 + 4 = 14_{(5)}$에서
$f(3) = 4 \quad \therefore$ 참
㉡. 오진법으로 쓸 때 1의 자리에는
$0, 1, 2, 3, 4$만이 올 수 있으므로
$0 \le f(n) \le 4 \quad \therefore$ 참
㉢. $f(n) = 2$ 이므로
$n^2 = p_k 5^k + p_{k-1} 5^{k-1} + \cdots + p_2 5^2 + p_1 \cdot 5 + 2$
$(p_i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 의 꼴로 나타낼 수 있다.
즉, n^2을 5로 나눈 나머지가 2가 된다는 뜻이다.
그런데 정수 l에 대하여
ⅰ) $n = 5l$이면 $n^2 = 25l^2$
즉, 5로 나눈 나머지는 0이다.
ⅱ) $n = 5l + 1$이면 $n^2 = (5l+1)^2 = 25l^2 + 10l + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
ⅲ) $n = 5l + 2$이면 $n^2 = (5l+2)^2 = 25l^2 + 20l + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
ⅳ) $n = 5l + 3$이면 $n^2 = (5l+3)^2 = 25l^2 + 30l + 5 + 4$
즉, 5로 나눈 나머지는 4이다.
ⅴ) $n = 5l + 4$이면 $n^2 = (5l+4)^2 = 25l^2 + 40l + 15 + 1$
즉, 5로 나눈 나머지는 1이다.
모든 자연수 n은 ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ), ⅴ)중
어느 한 꼴로 표현이 가능하므로
5로 나눈 나머지가 2가 되는 경우는 없다.
$\therefore$ 참

16. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.
㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서

㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수

$\therefore p = 0$

즉 $f(n) = 0$

㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$

$\therefore f(8) = f(24)$

㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$

홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

17. 함수 $f_n(x)$가 $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의될 때, $f_{28}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{20}$ ② $\dfrac{1}{24}$ ③ $\dfrac{1}{30}$ ④ $\dfrac{1}{32}$ ⑤ $\dfrac{1}{40}$

해설

$f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 이고

$f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ 이므로

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

$$f_{28}(x) = \frac{x}{28x+1}$$

$$\therefore\ f_{28}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{15} = \frac{1}{30}$$

18. 두 함수 $f(x)=2x-1,\ g(x)=-4x+5$ 에 대하여 $f\circ h=g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$f\circ h=g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ g$
$f^{-1}\circ(f\circ h)=\left(f^{-1}\circ f\right)\circ h=I\circ h=h$ (단, I 는 항등함수)
$\therefore h=f^{-1}\circ g$
한 편, $f(x)=2x-1$ 에서 $y=2x-1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면
$x=\frac{1}{2}(y+1)$
x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y=\frac{1}{2}(x+1)$
$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1)$
$h(x)=\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(-4x+5)=\frac{1}{2}(-4x+5+1)=-2x+3$
$\therefore h(-5)=-2\cdot(-5)+3=13$

19. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ a^2=b^2+c^2,\ b+c \le ka$ 를 만족하는 양의 상수 k 의 최솟값은?

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ $\sqrt{6}$　　⑤ $\sqrt{7}$

해설

$b+c \le ka$ 에서 $b+c>0$ 이므로
$(b+c)^2 \le k^2a^2,\quad (b+c)^2 \le k^2(b^2+c^2)$
그러므로 $(k^2-1)b^2-2bc+(k^2-1)c^2 \ge 0$
이 임의의 양수 $b,\ c$ 에 대하여 성립할 조건은
$k^2-1>0,\quad D/4=c^2-(k^2-1)^2c^2 \le 0$
두 식에서 $k>0$ 이므로 $k \ge \sqrt{2}$
따라서 k 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

20. $0 < a < b$, $A = \{x \mid a \le x \le b\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f : x \to \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}$ 는

(i) i $\ne j$ 일 때 $f(\text{i}) \ne f(j)$, (ii) $f(A) = A$

의 성질을 갖는다. $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 5$

해설

f 는 일대일 함수이고 (i) , 항등함수 (ii) 이다.

$$f(a) \ne f(b) \begin{cases} f(a) = \frac{1}{5}a^2 + \frac{4}{5} = a \\ f(b) = \frac{1}{5}b^2 + \frac{4}{5} = b \end{cases}$$

$\frac{1}{5}a^2 - a + \frac{4}{5} = 0 \to a^2 - 5a + 4 = 0$

$\to (a-1)(a-4) = 0$

$\therefore a = 1,\ 4$

$\frac{1}{5}b^2 - b + \frac{4}{5} = 0 \to b^2 - 5b + 4 = 0$

$\to (b-1)(b-4) = 0$

$\therefore b = 1,\ 4$

$\therefore a = 1,\ b = 4\ (\because\ 0 < a < b)$

$\therefore\ a + b = 5$