L. 전체집합 U = {0, 1, 2, 3, 4, 5}에 대하여 조건 x² - 2 > 0의 진리집합은?

주어진 조건
$$x^2 - 2 > 0$$
 에 $x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓) $x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓) $x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참) $x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참) $x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참) $x = 5$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)

따라서 구하는 진리집합은 {2, 3, 4, 5}

2. 정삼각형 ABC는 이등변삼각형 ABC이기 위한 무슨 조건인가?

 ① 충분조건
 ② 필요조건

 ③ 대우
 ④ 필요충분조건

⑤ 아무조건도 아니다.

정삼각형 ⊂ 이등변삼각형

- **3.** 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?
 - |a| = |b| 는 a = b 이기 위한 (가)조건이다.
 - 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나)조건이다.

① 필요, 필요③ 충분, 충분

② 필요, 충분④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

|a| = |b| $\xrightarrow{\times}$ a = b . 필요 $\{x \mid x = 3 \}$ 배수 $\} \supset \{x \mid x = 6 \}$ 배수 $\}$. 필요

- **4.** 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)
 - ① p: a < b, q: |a| < |b|
 - $p: 2x + 3 = 5, \quad q: x^2 2x + 1 = 0$
 - ③ p: a > 3, $q: a^2 > 9$
 - ④ p: x > 0 이코 y > 0, q: x + y > 0

해설

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

- ② p, q를 만족하는 값이 모두 x = 1이므로 필요충분조건이다. ③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p \vdash q$
- 이기 위한 충분조건이다.

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.∴ p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 A,B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

①
$$A \subset B$$
 ② $A \cap B = \emptyset$ ③ $A \cap B = A$
 ② $A \cup B = U$

해설 B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 (4)가 정답이다.

- 6. 두 양수 a,b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?
 - ① a,b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.
 - ② \sqrt{ab} 는 a,b의 기하평균이다.
 - ③ $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.
 - $\underbrace{a+b}_2 = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.
 - ⑤ $a + \frac{1}{a} \ge 2$ 는 항상 성립한다.

- 해설

 $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

- $\frac{a+b}{2}$: 산술평균, \sqrt{ab} : 기하평균
- ④: 절대부등식의 등호는 a = b일 때 성립한다.

- **7.** 양수 x에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{1}$ 의 최솟값은?

 - ① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt[3]{3}$

(5) 10

x > 0 이므로

 $8x^{2} + \frac{2}{x} = 8x^{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ $\geq 3\sqrt[3]{8x^{2} \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$ (단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

8. 양수 x에 대하여 $\frac{x^2 + 2x + 2}{x}$ 는 x = a에서 최솟값 b를 가질 때, -2a + b + 1의 값은?

$$x > 0$$
이므로 산술평균, 기하평균에 의하여
$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$
$$x + \frac{2}{x} + 2 \ge 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$
(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립) 최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$ 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

9.
$$a \ge 0, \ b \ge 0, \ c \ge 0$$
이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

 $(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$
이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로
 $0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$

- **10.** 실수 x, y 에 대하여 조건 '|x| + |y| = 0'의 부정과 같은 것은?

 - ② $x = y \neq 0$
 - ③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$
 - ④ x, y 중 적어도 하나는 0 이다.
 - ⑤x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

- 해설 |x| + |y| = 0 의 부정은 |x| + |y| ≠ 0 이다.

때라서, $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이므로 x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

11. 다음 두 조건
$$p,q$$
를 만족하는 집합을 각각 P,Q 라고 할 때, $Q^c \subset P^c$ 인 경우는?

$$q: x \le 1$$
② $p: x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
 $q: x = 1$

 $p: x \le 1$

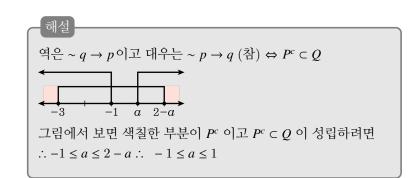
③
$$p: a > 0, b > 0$$

 $q: a^2 + b^2 \ge 2a - 1$
④ $p: x$ 가 3의 배수

③
$$q: a^2+b^2 \ge 2a-1 \to a^2-2a+1+b^2 \ge 0 \to (a-1)^2+b^2 \ge 0$$
 $\to a, b$ 는 모든 실수

12. 두 조건 $p: -3 \le x \le 2 - a, \ q: x \le -1$ 또는 $x \ge a$ 에 대하여 명제 $p \to q$ 의 역이 참이 되게 하는 실수 a의 범위를 구하면?

①
$$-1 \le a \le 0$$
 ② $-1 \le a \le 1$ ③ $-1 \le a \le 2$
④ $-1 < a < 3$ ⑤ $-1 < a < 5$



13. 다음 중 두 조건 p, q에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건만 되는 것은? (단, x, y는 실수, A, B는 집합이다.)

①
$$p: x^2 - 4x + 4 = 0, q: x^2 - 3x + 2 = 0$$

주어진 명제는 거짓이고 역은 참인 것을 고른다.

$$(4) p: |x + y| = |x| + |y|, \ q: x = y$$

해설

- ① 충분조건
- ② 아무런 조건 아님
- ③ 필요충분조건
- ⑤ 필요충분조건

14. 두 조건 $p: a \le x, q: 1 \le x \le 5$ 에 대하여 $p \vdash q$ 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

② $a \le 0$

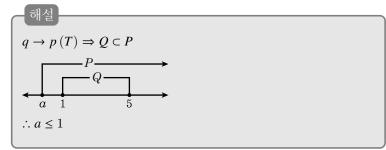
(5) a < 3

해설
$$a \to p(T) \Rightarrow O \subset P$$

(1) a < -1

(4) a < 2





15. 실수 a, b에 대하여 $a^2 + b^2 \ge -ab$ 임을 증명한 것이다. [가], [나]에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$$A = a^{2} + b^{2}, \ B = -ab$$

$$A - B = a^{2} + b^{2} - (-ab)$$

$$= a^{2} + b^{2} + ab$$

$$= a^{2} + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^{2} + b^{2}$$

$$= \left(a + \frac{b}{2}\right)^{2} + \frac{3}{4}b^{2}([7+])0$$
따라서 $A - B \ge 0$ 이므로 $A([4])B$ 이다. 즉, $a^{2} + b^{2} \ge -ab$ (단등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

①
$$>, \ge$$
 ② \ge, \ge ③ $>, >$ ④ $<, \ge$ ⑤ \le, \le

즉. $a^2 + b^2 > -ab$ (단 등호는 a = b = c일 때 성립)

16. 세 조건 p,q,r을 만족하는 집합을 각각 P,Q,R 이라 하면 $P \cap Q = P, \ Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

①
$$\sim p \rightarrow \sim q$$
 ② $q \rightarrow p$ ③ $q \rightarrow \sim r$
② $\sim p \rightarrow \sim r$

해설
$$P \cap Q = P \text{ 이면 } P \subset Q$$

$$Q \cup R = R \text{ 이면 } Q \subset R$$

$$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \text{ 이므로 } p \Rightarrow r \text{ 이다.}$$

$$\therefore \text{ 대우: } \sim r \rightarrow \sim p \text{ 도 참이다.}$$

17. 다음 중 명제와 그 역이 <u>모두</u> 참인 것은?

- ① $xy \ge 0$ 이면 $x \ge 0$ 또는 $y \ge 0$
- ② $x + y \ge 0$ 이면 $x \ge 0$ 이고 $y \ge 0$
- ③ $x \ge y$ 이면 $\frac{1}{x} \le \frac{1}{y}$
- $4x \le 2$ 이면 $|x-1| \le |x-3|$
- ⑤ a > 0 이고 b > 0 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

- ① 거짓: (반례) x = -2, y = -1 일 때, $xy = 2 \ge 0$ 이지만 -2 < 0 이고 -1 < 0 이다
 - ② 거짓: (반례) x = -2, y = 3 일 때,
- $x + y = -2 + 3 \ge 0$ 이지만 -2 < 0 이고 3 > 0 이다.
- ③ 거짓: (반례) x = 2, y = -2 일 때,
- $2 \ge -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.

역이 모두 참이다.

- ④ $|x-1| \le |x-3|$ 의 양변을 제곱하면 $x^2 2x + 1 < x^2 6x + 9$ 에서 x < 2 이므로 원래의 명제와 그
- ⑤ 명제 'a > 0 이고 b > 0 이면 $a^2 + b^2 > 0$ '은 참이지만, 그의 역 ' $a^2 + b^2 > 0$ 이면 a > 0 이고 b > 0'은 거짓이다.

18. 다음은 자연수 n 에 대하여 명제 ' n^2 이 3 의 배수이면 n 도 3 의 배수이다.'를 증명한 것이다.

주어진 명제의 대우를 구하면 'n 이 3 의 배수가 아니면 n^2 도 (r)'이다. n 이 3 의 배수가 아니므로 $n=3m\pm(r)$ (m 은 자연수)에서 $n^2=9m^2\pm6m+1=3\left(3m^2\pm2m\right)+1$ 따라서, $3m^2\pm2m$ 이 (r)이므로 n^2 은 (r) 그러므로 대우가 (r)이므로 주어진 명제도 (r)이다.

위

- 의 과정에서 빈칸에 들어갈 수나 식이 잘못 연결된 것은?
- ① (가) 3 의 배수가 아니다. ② (나) 1
- ③ (다) 자연수 ④(라) 3 의 배수이다.
- ⑤ (마) 참

해설

주어진 명제의 대우는 'n 이 3의 배수가 아니면 n^2 도 3의 배수가 아니다' 이다. n 이 3의 배수가 아니므로 $n=3m\pm1$ (m은 자연수)에서 $n^2=9m^2\pm6m+1=3$ ($3m^2\pm2m$)+1 따라서, $3m^2\pm2m$ 이 자연수 이므로 n^2 은 3의 배수가 아니다. 그러므로 대우가 참 이므로 주어진 명제도 참 이다.

19. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 'ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.' 를 증명한 것이다.

a,b 를 모두 홀수라 하면 a=2m-1,b=2n-1 (m,n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로 ab=(2m-1)(2n-1)=4mn-2m-2n+1=2(2mn-m-n)+1이때, 2mn-m-n이 ______'이므로, ab는 _____이다. 따라서, 'a,b 가 홀수이면 ab는 홀수이다.'는 참이고 이것은 주어진 명제의 _____이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① 자연수, 홀수, 역

② 정수, 짝수, 대우 ④ 유리수, 짝수, 이

- ③ 정수, 홀수, 대우
- ⑤ 유리수, 홀수, 이

20. 다음은 'x, v 가 자연수일 때, xv 가 짝수이면 x 또는 v 가 짝수이다.' 를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다)에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 **거은**?

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, v 에 대하여 x 와 v 가 (가)이면 xy 도 (가)이다.' 이다. x = 2a - 1, y = 2b - 1 $(a, b \in \mathcal{A})$ 라 하면 xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab-a-b) + 1 이므로 xy = (4b-a-b) + 1가 된다.

따라서, 대우가 (다)이므로 주어진 명제도 (다)이다.

- ① 짝수. 홐수. 참
- ④ <u>홀</u>수, 홀수, 참

② 짝수, 짝수, 참

⑤ 혹수 혹수 거짓

③ 짝수 짝수 거짓

해설

xv 도 홐수이다.' 이다. x = 2a - 1, y = 2b - 1 $(a, b \in A^2$ 자연수) 라 하면 xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab-a-b)+1 이므로 xy 는 홀수가 된다

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, v에 대하여 x 와 v가 홀수이면

따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

21. 조건 p, q, r 을 만족시키는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, $P = \{x|-1 \le x \le 1, \ x \ge 5\}$, $Q = \{x|x \ge a\}$, $R = \{x|x \ge b\}$ 이다. 이 때, 조건 $q \vdash p$ 이기 위한 필요조건이고, 조건 $r \vdash p$ 이기위한 충분조건이면 q 의 최댓값과 q 의 최숫값은?

① a 의 최댓값 1 . b 의 최솟값 -1

② a 의 최댓값 -1 . b 의 최솟값 1

③ a 의 최댓값 5 . b 의 최솟값 -1

④ a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 5

해설 $p \rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이면 $q \vdash p$ 이기 위한 필요조건.

 $r \rightarrow p$, 즉 $R \subset P$ 이면

22. 네 조건 p,q,r,s에 대하여 $p \in q$ 이기 위한 충분조건, $r \in q$ 이기 위한 필요조건, $s \in r$ 이기 위한 충분조건 일 때 다음 중 옳은 것은?

①
$$r \rightarrow q$$
 ② $q \rightarrow \sim p$ ③ $s \rightarrow \sim q$
② $q \rightarrow \sim p$

$$p \rightarrow q$$
 $s \rightarrow \sim r$ $q \rightarrow r$
 $q \rightarrow r$ 의 대우: $\sim r \rightarrow \sim q$
 $\therefore s \rightarrow \sim r, \sim r \rightarrow \sim q$ 이므로 $s \rightarrow \sim q$

a, b, c, d, x, y, z가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라 라.(단, 순서대로 쓸 것)

①
$$a^2 + b^2 \ge ab$$

② $a^2 + b^2 + 1 < 2(a + b - 1)$
② $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \le (ax + by + cz)^2$
② $|a + b| \le |a| + |b|$
③ $|a| - |b| \ge |a - b|$
④ $|a + b| \ge |a| - |b|$

답:

∴
$$a^2 + b^2 \ge ab$$
: 맞음
© $a^2 + b^2 + 1 - 2(a + b - 1)$

$$a^{2} + b^{2} + 1 - 2(a)$$
$$= a^{2} - 2a + b^{2} - 2$$

$$a^{2} + b^{2} + 1 - 2(a + b - a^{2} - 2a + b^{2} - 2b + 3)$$

$$= a^{2} - 2a + b^{2} - 2b + 3$$

$$a^{2} + b^{2} + 1 - 2(a^{2} + b^{2} - 2a +$$

$$= a^{2} - 2a + b^{2} - 2b + 3$$

$$= (a - 1)^{2} + (b - 1)^{2} + 1 > 0$$

=
$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + 1 > 0$$

∴ $a^2 + b^2 + 1 > 2(a+b-1)$: 틀림
© $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$

 $= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2$

$$2abxy + 2bcyz + 2cazx)$$

= $(ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \ge 0$

 $+b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + b^2y^2 + b^2z^2 +$

$$= a^{2} 2|ab| + b^{2} - (a^{2} + 2ab + b^{2})$$

$$= a^{2} 2|ab| + b^{2} - (a^{2} + 2ab + b)$$
$$= 2|ab| - 2ab \ge 0(\because |ab| \ge ab)$$

=
$$2|ab| - 2ab \ge 0$$
(∵ $|ab| \ge ab$)
∴ $|a| + |b| \ge |a + b|$: 맞음

◎ 제곱의 차 비교

$$= a^{2} - 2|ab| + b^{2} - (a^{2} - 2ab + b^{2})$$

$$= -2|ab| + 2ab \le 0(\because |ab| \ge ab)$$

∴ |a| - |b| ≤ |a - b|: 틀림 $|a+b|^2 - (|a|-|b|)^2$ $= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2)$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 2ab + 2ab + 2ab + 2ab + 2ab = 0$$

$$2|ab| \ge$$

 $\ge |a| -$

24. 네 개의 명제 p, q, r, s가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

①
$$p$$
 ② p, q ③ q, r ④ p, q, r

 $\bigoplus p, q, r$

 \bigcirc , \bigcirc 에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p는 참이다. \bigcirc 에서 p가 참이면 q가 참이고 \square 에서 q 가 참이면 r도 참이다. (:: ~ p는 거짓) ©에서 대우가 참이므로 s도 참이다. ∴ p, q, r, s 모두 참이다

25. 다음 중 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 몇 개인가?

- \bigcirc p: xy = |xy|, q: x > 0, y > 0
- p: xy + 1 > x + y > 2, q: x > 1, y > 1
- \Rightarrow $p: |x| + |y| > |x + y|, q: x + y \ge 2$
- \bigcirc $p: x \ge 1, y \ge 1, q: x + y \ge 2$
- $\exists p: x + y = 0, xy = 0, q: x = 0, y = 0$
- \bigcirc $p: x + y\sqrt{2} = 0, q: x = y = 0 (x, y$ 는 유리수)
- \bigcirc $p:|x|=|y|, q:x^2=y^2$

- ① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개
- (4) 5 ¹ (5) 6 ¹ H

해설

(L) (E) (H) (A) (O)