

1. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 6\text{보다 작은 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - B$ 는?

① $\{1\}$

② $\{2\}$

③ $\{1, 2\}$

④ $\{2, 3\}$

⑤ $\{2, 3, 4\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로 $(A \cup B) - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$ 이다.

2. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x+y \mid x \in A, y \in A\}$, $C = \{xy \mid x \in A, y \in A\}$ 일 때, 집합 $A \cup (B - C)$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

- ① 3 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$$B = \{2, 3, 4\}, C = \{1, 2, 4\}$$

$$\therefore B - C = \{3\}$$

$\therefore A \cup (B - C) = \{1, 2, 3\}$ 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개)이다.

3. 두 조건 $p : |x-2| \leq h$, $q : |x+1| \leq 7$ 에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h 의 최댓값을 구하여라. (단, $h \geq 0$)

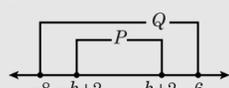
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$p : 2-h \leq x \leq 2+h$$

$$q : -8 \leq x \leq 6$$



$$-h+2 \geq -8 \leftrightarrow h \leq 10, h+2 \leq 6 \leftrightarrow h \leq 4$$

$$\therefore h \leq 4$$

$$\therefore n \text{의 최댓값은 } 4$$

4. 세 조건 p, q, r 에 대하여 q 는 p 의 필요조건, q 는 r 의 충분조건이고 r 는 p 의 충분조건이다. 이 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요충분조건

해설

q 는 p 의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots \textcircled{1}$

q 는 r 의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{2}$

r 는 p 의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로

$p \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서 $r \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로 $r \Leftrightarrow p$ 이다.

\therefore 필요충분조건

5. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

ab 와 $\frac{4}{ab}$ 가 양수이므로

$$ab + \frac{4}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$$

$$\therefore ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5 = 9$$

6. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$ 를 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x - 2y + 3z$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$(x - 2y + 3z)^2$$

$$= \{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\}^2$$

$$\leq \{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\}$$

$$\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\}$$

$$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \leq 144$$

$$\therefore -12 \leq x - 2y + 3z \leq 12$$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$$

즉, $x = -y = \pm 2z$ 일 때 등식이 성립한다.

7. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$ 인 함수 f 의 그래프가 될 수 있는 것은?

- ① $\{(0, 1), (1, 2)\}$ ② $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$
③ $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2)\}$ ④ $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$
⑤ $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

해설

$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c$ 라 하면,
함수 f 의 그래프는
 $(0, a), (1, b), (2, c)$ 의 꼴이어야 한다.

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f(f(f(x))) = x$ 가 되는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여
 $f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$
 $f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$
 $f(f(f(x))) = x$ 이므로 $8x - 21 = x$
 $\therefore x = 3$

9. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

10. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2 + 3) = f(2) = 2 + 5 = 7$$

$$f^{-1}(2) = t \text{ 라 하면 } f(t) = 2$$

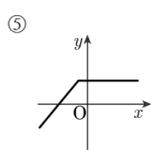
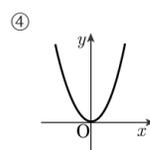
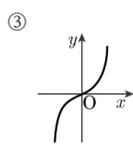
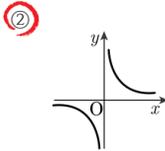
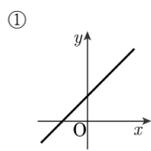
그런데 $x+5 \geq 5$ ($\because x \geq 0$) 이고

$$-x^2+3 < 3$$
 ($\because x < 0$) 이므로 $-t^2+3 = 2$

$$\therefore t = f^{-1}(2) = -1$$
 ($\because t < 0$) $\cdots \textcircled{1}$

$$\text{따라서 } (f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$$

11. 다음 중 임의의 실수 x 에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형으로 적당한 것은?



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$ 이므로
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이다.
 그런데 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족하려면
 함수 $f(x)$ 는 일대일 대응이고
 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이어야 한다.

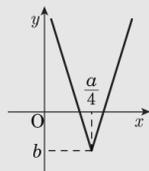
12. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

13. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표를 구하면?

- ① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)
④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P의 좌표를 $P(x)$ 라 하면

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$$

$$y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2| \text{의}$$

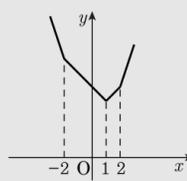
그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최

솟값을 가진다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(1)

이다.



14. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)$$

$$= (z-y)x^2 - (z^2 - y^2)x + yz^2 - y^2z$$

$$= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y)$$

$$= (z-y) \{x^2 - (z+y)x + zy\}$$

$$= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

15. 분수식 $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} - \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $-\frac{x-2}{x(x-1)}$

② $\frac{x+2}{x(x+1)}$

③ $\frac{x-2}{x(x+1)}$

④ $\frac{x+2}{x(x-1)}$

⑤ $\frac{x-2}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &= 1 - \frac{1}{x+1}, \\ \frac{2x-1}{x-1} &= 2 + \frac{1}{x-1}, \\ \frac{3x^2+4x+2}{x^2+x} &= 3 + \frac{x+2}{x^2+x} \quad \text{이므로} \\ (\text{준식}) &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(2 + \frac{1}{x-1}\right) \\ &\quad - \left(3 + \frac{x+2}{x^2+x}\right) \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x(x+1)} \\ &= \frac{-x(x-1) + x(x+1) - (x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2 + x + x^2 + x - x^2 - x + 2}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2 + x + 2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{-(x^2 - x - 2)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{-(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= -\frac{x-2}{x(x-1)} \end{aligned}$$

16. 자연수 a, b, c, d 에 대하여 $\frac{75}{23} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$ 일 때, $a + b + c + d$

의 값은?

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$$\begin{aligned}\frac{75}{23} &= 3 + \frac{6}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{6}} \\ &= 3 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}} \\ &= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}\end{aligned}$$

$$\therefore a = 3, b = 3, c = 1, d = 5$$

$$\therefore a + b + c + d = 12$$

17. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라.(단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \text{㉠}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} \times 2 - \text{㉡} : 3x = z$$

$$\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$$

여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$

$$\text{따라서 } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$$

$$\therefore m + n = 8$$

18. 유리함수 $y = \frac{4x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$y = \frac{4x+3}{x+2} = \frac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \frac{-5}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$y = \frac{-5}{x} \text{ 의 그래프를 } x \text{ 축 방향으로 } -2,$$

y 축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$a+b+c = (-5) + (-2) + 4 = -3$$

19. 유리함수 $f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때, 실수 k 의 값은?

- ① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x) = \frac{kx}{x+3}$ 가 직선 $y = x$ 에 대해 대칭이므로

$$f(x) = f^{-1}(x), f^{-1}(x) = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\frac{kx}{x+3} = \frac{-3x}{x-k}$$

$$\therefore k = -3$$

20. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$ 이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x-1$

$\therefore x = y^2 - 4y + 5 (y \geq 2)$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

21. $a_1 = 1, a_{10} = 37$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$ 이므로

$$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$$

$$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$$

$$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$$

22. 100 이하의 자연수 중에서 3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수의 합은?

- ① 1600 ② 1620 ③ 1650 ④ 1680 ⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면 2, 5, 8, ..., 98이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이룬다.

이 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

이때, 끝항 98은 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98은 제 33항이다.

따라서 구하는 합을 S 라 하면

$$S = \frac{33(2+98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$$

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

㉠ $2 \in A$

㉡ $m, n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$

$2 \in A, 2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$

이와 같은 과정을 반복하면

$2^4 \in A, 2^5 \in A, 2^6 \in A, \dots$

따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 이다.

25. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A^c \cap B = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

- | | | |
|------------------|--------------------|-----------------------|
| ㉠ $A = B$ | ㉡ $A \cup B = B$ | ㉢ $A^c \subset B^c$ |
| ㉣ $A \cap B = B$ | ㉤ $A \cup B^c = U$ | ㉥ $A - B = \emptyset$ |

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore B \subset A$

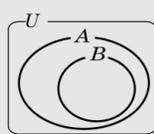
㉠ $A = B$ 는 $B \subset A, A \subset B$ 이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \leftrightarrow A^c \subset B^c$

㉤ $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉥ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

\therefore 3개



27. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A \cap B^c)^c$ 로 정의할 때, 다음 중 $(A\Delta B)\Delta B$ 와 같은 것은?

- ① $A \cup B$ ② $A \cap B$ ③ $A - B$ ④ A ⑤ B

해설

$$A\Delta B = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

$$\begin{aligned} \therefore (A\Delta B)\Delta B &= (A^c \cup B)^c \cup B = (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = A \cup B \end{aligned}$$

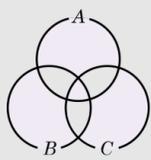
28. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 \otimes 을 $X \otimes Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 로 정의하자. 1에서 30까지의 자연수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $(A \otimes B) \otimes C$ 의 원소의 개수는?

- ① 11개 ② 12개 ③ 13개 ④ 14개 ⑤ 15개

해설

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) &= (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c \\ &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ &= (X - Y) \cup (Y - X) \end{aligned}$$

이 정의로부터 $(A \otimes B) \otimes C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이때, $A \cap B$ 는 6의 배수의 집합,
 $B \cap C$ 는 15의 배수의 집합,
 $C \cap A$ 는 10의 배수의 집합,
 $A \cap B \cap C$ 는 30의 배수의 집합이므로
 $n(A) = 15, n(B) = 10, n(C) = 6,$
 $n(A \cap B) = 5, n(B \cap C) = 2, n(C \cap A) = 3,$
 $n(A \cap B \cap C) = 1$

$$\begin{aligned} \therefore n\{(A \otimes B) \otimes C\} &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad - 2\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} \\ &\quad + 4 \cdot n(A \cap B \cap C) \\ &= 15 + 10 + 6 - 2(5 + 2 + 3) + 4 \\ &= 15 \end{aligned}$$

29. 세 조건 p, q, r 을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P, Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \rightarrow \sim q$

② $q \rightarrow p$

③ $q \rightarrow \sim r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$

$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.

\therefore 대우 : $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

30. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 'ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.' 를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
 이때, $2mn - m - n$ 이 이므로, ab 는 이다.
 따라서, 'a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.' 는 참이고 이것은 주어진 명제의 이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

- ① 자연수, 홀수, 역 ② 정수, 짝수, 대우
 ③ 정수, 홀수, 대우 ④ 유리수, 짝수, 이
 ⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
 $a = 2m - 1, b = 2n - 1$ (m, n 은 정수)로 나타낼 수 있으므로
 $ab = (2m - 1)(2n - 1) = 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(2mn - m - n) + 1$
 이때, $2mn - m - n$ 이 정수 이므로 ab 는 홀수 이다. 이것은 주어진 명제의 대우가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

31. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \text{ 를 만족시킨다. 이 때, } f(1998) \text{ 의 값은?}$$

- ① 3 ② 2 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$f(2) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} \\ = \frac{1+3}{1-3} = -2$$

$$f(3) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} \\ = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

$$f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} \\ = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$f(5) = \frac{1+f(4)}{1-f(4)} \\ = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

$$f(5) = f(1) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(6) = f(2) = -2, f(7) = f(3) = -\frac{1}{3}$$

$$f(8) = f(4) = \frac{1}{2}, f(9) = f(5) = f(1) = 3, \dots$$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수) 은

3, -2, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$$\therefore f(4n+k) = f(k)$$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k = 0, 1, 2, 3$)

$$\text{그러므로 } f(1998) = f(4 \times 499 + 2) = f(2) = -2$$

32. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x$, $h(x) = \frac{100x + 200}{f(x)}$

에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h \circ g)(8)$ 의 값은?

- ① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$$\begin{aligned} g(8) = k \text{ 라고 하면 } f(k) = 8 \text{ 이다.} \\ \Rightarrow k^2 + 2k = 8 \\ \Rightarrow k = -4, 2 \Rightarrow k = 2 (\because k > 0) \\ \therefore (h \circ g)(8) = h(g(8)) = h(2) \\ = \frac{100 \times 2 + 200}{f(2)} = 50 \end{aligned}$$

33. $f(x)$ 는 유리수를 계수로 하는 x 의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$,
 $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ 0 ⑤ 3

해설

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4 \times 3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2 + \sqrt{3})$$

$$= (2 + \sqrt{3})^2 + a(2 + \sqrt{3}) + b$$

$$= (7 + 2a + b) + (4 + a)\sqrt{3} = 0$$

그런데, $7 + 2a + b$, $4 + a$ 는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$$7 + 2a + b = 0, 4 + a = 0 \quad \therefore a = -4, b = 1$$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2 + \sqrt{3}$ 은 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이고, a, b 가 유리수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$$\text{두 근의 합 } 4 = -a, \text{ 두 근의 곱 } 1 = b$$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

34. 함수 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a - b$ 의 값은? (단, $a < 0$)

- ① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 2)$ 를 지나

고

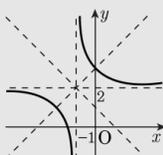
기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y - 2 = -(x + 1)$

$$\therefore y = -x + 1$$

따라서 $a = -1, b = 1$ 이므로 $a - b = -2$



35. 전체집합 $U = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 의 부분집합

$$A = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{1}{x} \right\}, B = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{1}{x} \right\}, C = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{2}{x} \right\},$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{2}{x} \right\} \text{에 대하여 다음 포함관계 중 옳지 않은 것은?}$$

① $A \supset C$

② $B \supset D$

③ $A \cap B = \emptyset$

④ $C \cap D = \emptyset$

⑤ $A - B = A$

해설

$y = \frac{1}{x} \dots$ ①, $y = \frac{2}{x} \dots$ ② 의 그래프는

다음 그림과 같다.

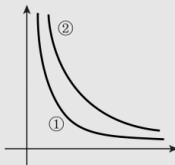
A의 영역이 C의 그것을 포함하므로 ①은 옳다.

D의 영역이 B의 그것을 포함하므로 ②는 옳지 않다.

A와 B는 만나지 않으므로 ③은 옳다.

C와 D는 만나지 않으므로 ④는 옳다.

A와 B는 만나지 않으므로 ⑤ 역시 옳다.



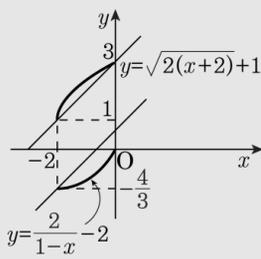
36. 정의역이 $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1, y = \frac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다 아래에 있고 $y = \frac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \frac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다

아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x+r$ 의 그래프가

$y = \frac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다

위에 있으므로 $r > \frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{2}{3} < r < 3$$

따라서 $r_1 = \frac{2}{3}, r_2 = 3$ 이므로

$$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -1$$

37. 등차수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 의 합이 2375가 되도록 하는 p, q 의 값은?

- ① $p = 11, q = 3$ ② $p = 12, q = 4$ ③ $p = 15, q = 3$
 ④ $p = 16, q = 4$ ⑤ $p = 17, q = 5$

해설

(i) 두 수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100$ 과 $100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 는 공차가 같은 등차수열이므로

$$100 = 85 + (p+1)d, \quad 105 = 100 + (q+1)d$$

$$\frac{100 - 85}{p+1} = \frac{105 - 100}{q+1}$$

$$15(q+1) = 5(p+1) \quad \therefore p = 3q + 2$$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p+q+3$ 인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\frac{(p+q+3)(85+105)}{2} = 2375$

$$p+q+3 = 25 \quad \therefore p+q = 22 \cdots \text{㉠}$$

이때, (i)에서 $p = 3q + 2$ 이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면 $p = 17, q = 5$

38. x 의 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대해 $A = \{x \mid f(x) - g(x) = 0\}$, $B = \{x \mid f(x) = 0, g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid (f(x))^2 - (g(x))^2 = 0\}$ 일 때, 다음 중 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계로 옳은 것을 고르면?

- ① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset A \subset C$
 ④ $B \subset C \subset A$ ⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$$\begin{aligned}
 A &= \{x \mid f(x) - g(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = g(x)\} \\
 B &= \{x \mid f(x) = 0, g(x) = 0\} \\
 &= \{x \mid f(x) = g(x) = 0\} \\
 \therefore B &\subset A \quad \cdots \text{㉠} \\
 C &= \{x \mid (f(x))^2 - (g(x))^2 = 0\} \\
 &= \{x \mid f(x) = g(x) \text{ 또는 } f(x) = -g(x)\} \\
 \therefore A &\subset C \quad \cdots \text{㉡} \\
 \text{㉠, ㉡에서 } B &\subset A \subset C
 \end{aligned}$$

39. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 다음 두 조건을 동시에 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

(가) 집합 X 는 적어도 하나의 홀수를 포함한다.

(나) $n(X) \leq 5$

▶ 답: 개

▷ 정답: 112 개

해설

전체집합 U 의 부분집합의 개수는
 $2^7 = 128$ (개)
이 중 홀수를 포함하지 않는 집합의 개수는
 $2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)
따라서 (가)를 만족하는 집합 X 의 개수는
 $128 - 8 = 120$ (개)
이때, $n(X) = 6$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \dots$,
 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 7개로 이들은 모두 조건 (가)를 만족한다.
또 $n(X) = 7$ 인 집합 X 는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 1개로 이것도 역시
조건 (가)를 만족한다.
따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $120 - (7 + 1) = 112$ (개)

40. $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 이다. $n(A \cap B \cap X) = 1$, $B \cup X = B$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

- ① 21 개 ② 22 개 ③ 23 개 ④ 24 개 ⑤ 25 개

해설

$A \cap B = \{2, 4, 6\}$, $B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$,
즉 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 2, 4, 6 중 어느 하나만
원소로 갖는 집합이므로
2, 4, 6 중 2 만을 원소로 가질 때 $2^3 = 8$
4, 6 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지로
집합 X 의 개수는 $8 \times 3 = 24$ (개)

41. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8, 12, 16\}$ 에 대하여 $A * B = A - (A \cap B)$ 라 할 때, $B * (A * B)$ 의 집합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

$$A \cap B = \{4, 8\}$$

$$A * B = \{2, 6\}$$

$$B \cap (A * B) = \emptyset$$

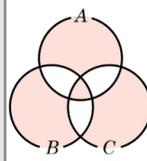
$$B * (A * B) = B = \{4, 8, 12, 16\}$$

42. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여, 연산 Δ 을 $X\Delta Y = (X\cup Y)\cap(X^c\cup Y^c)$ 로 정의한다. 1에서 30까지의 정수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 차례로 A, B, C 라 할 때, $(A\Delta B)\Delta C$ 의 원소의 개수를 구하면?

- ① 10개 ② 13개 ③ 15개 ④ 17개 ⑤ 19개

해설

$X\Delta Y = (X\cup Y) - (X\cap Y) = (X-Y)\cup(Y-X)$
 $(A\Delta B)\Delta C$ 의 벤다이어그램은 다음과 같다.
 $\therefore n((A\Delta B)\Delta C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2(n(A\cap B) + n(B\cap C) + n(C\cap A)) + 4n(A\cap B\cap C)$
 $= (15 + 10 + 6) - 2(5 + 2 + 3) + 4 = 15(\text{개})$



43. 긴 나무막대기 위에 이 막대기의 길이를 10등분, 12등분, 15등분하는 세 종류의 눈금이 새겨져 있다. 이 눈금을 따라 막대기를 자르면 모두 몇 토막이 나겠는가?

- ① 20토막 ② 28토막 ③ 36토막
 ④ 48토막 ⑤ 60토막

해설

나무막대기의 길이를 1이라 하면 세 종류의 눈금의 간격은 각각

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15} \text{이다.}$$

즉, $\frac{6}{60}, \frac{5}{60}, \frac{4}{60}$ 이므로 60이하의 수 중에서 4의 배수 또는 5의 배수 또는 6의 배수인 수의 개수를 구하면 된다. 60이하의 자연수 중 4의 배수, 5의 배수, 6의 배수의 집합을 각각 A, B, C 라 하면

$$n(A) = 15, n(B) = 12, n(C) = 10, n(A \cap B) = 3, n(B \cap C) = 2, n(C \cap A) = 5, n(A \cap B \cap C) = 1$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 15 + 12 + 10 - 3 - 2 - 5 + 1$$

$$= 28$$

44. $a \geq 1, b \geq 1$ 이고 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$ 일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M \cdot m$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} = 2\sqrt[4]{ab}$
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$ 이므로 $2\sqrt[4]{ab} \leq 4$
 $\therefore \sqrt[4]{ab} \leq 2$
 $\therefore \sqrt{ab} \leq 4$
 따라서, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$
 ($\because \sqrt{ab} \leq 4$ 이므로 $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{1}{4}$)
 한편, $a \geq 1, b \geq 1$ 이므로
 $0 < \frac{1}{a} \leq 1, 0 < \frac{1}{b} \leq 1$
 $\therefore 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$
 $\therefore M = 2, m = \frac{1}{2}$
 $\therefore M \cdot m = 1$

45. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 과 $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β , $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을 γ, σ 라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,
 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 를 만족한다.
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b, \gamma + \sigma = b,$
 $\gamma\sigma = a(a, b > 0)$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{9(\gamma + \sigma)}{\gamma\sigma}$
 $= \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 6$
 $\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} \geq 6$

46. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 를 $f(x) = r$ (r 은 $3x$ 를 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, f^n 이 항등함수가 되는 최소의 자연수 n 의 값은? (단, $f^1 = f, f^{n+1} = f \circ f^n, n$ 은 자연수)

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 f 의 대응을 조사해 보면

$$1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 1$$

$$2 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2$$

$$5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} f 5$$

$$\therefore f^4 = f^8 = f^{12} = \dots = I(\text{항등함수})$$

$$\therefore \text{최소의 자연수는 } 4$$

47. $a+b+c=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① a 는 1일 수 없다.
- ② a, b, c 중 꼭 하나만 1이다.
- ③ a, b, c 중 꼭 두 개만 1이다.
- ④ a, b, c 중 적어도 하나는 1이다.
- ⑤ a, b, c 가 모두 1이 될 수는 없다.

해설

$$\begin{aligned} a+b+c=1 & \therefore a+b+c-1=0 \cdots \textcircled{1} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1, \quad \frac{ab+bc+ca}{abc}=1 \\ \therefore abc-ab-bc-ca=0 \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{에서 } abc-ab-bc-ca+a+b+c-1=0 \\ 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc=0 \\ \therefore (1-a)(1-b)(1-c)=0 \\ \text{따라서 } a, b, c \text{ 중 적어도 하나는 1이다.} \end{aligned}$$

48. $a = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ $10\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}, b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \text{ 이므로} \\ a^3 &= 7-5\sqrt{2}, b^3 = 7+5\sqrt{2} \quad \therefore a^3 + b^3 = 14 \\ \text{그리고 } ab &= \sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})} = -1 \text{ 이므로} \\ (a+b)^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \text{ 에서 } a+b = t \text{ 라 하면} \\ t^3 &= 14 - 3t, t^3 + 3t - 14 = 0 \\ (t-2)(t^2 + 2t + 7) &= 0 \\ \therefore t &= 2 \quad (\because t^2 + 2t + 7 \neq 0) \\ \therefore a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab = 2^2 + 2 = 6 \end{aligned}$$

49. 곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 x 축 위의 점 $(a, 0)$ 으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a 의 값을 정하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,

그 접선은 점 $(a, 0)$ 을 지나므로 $y = m(x - a)$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$$(mx - am)^2 - 2(mx - am) + 4x - 3 = 0$$

$$m^2x^2 - 2(am^2 + m - 2)x + a^2m^2 + 2am - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (am^2 + m - 2)^2 - m^2(a^2m^2 + 2am - 3) = 0$$

정리하면, $(1 - a)m^2 - m + 1 = 0$

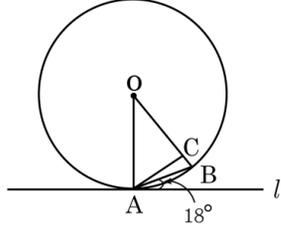
m 의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{1 - a} = -1$$

$$\therefore a = 2$$

50. 원 O 위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 18° 이다. 선분 OB 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는?



- ① 68° ② 72° ③ 76° ④ 80° ⑤ 84°

해설

접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 18° 이므로 $\angle AOC = 36^\circ$ 이다.

$\angle OAC = \alpha$, $\angle ACO = \beta$ 라 하면, $\alpha + \beta = 144^\circ$ 이고, 가장 긴 변이 선분 OA이므로 가장 큰 각은 β 이다.

(i) 36° , α , β 의 순서로 등차수열을 이루는 경우
 $2\alpha = \beta + 36^\circ = (144^\circ - \alpha) + 36^\circ = 180^\circ - \alpha$

$$\alpha = 60^\circ, \beta = 84^\circ$$

(ii) α , 36° , β 의 순서로 등차수열을 이루는 경우
 $2(\alpha + \beta) = 72^\circ$ 가 되므로 모순이다.

(i), (ii)에 의해 $\beta = 84^\circ$