1. 전체집합 $U = \{x|x$는 6보다 작은 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1,2,4\}, B = \{3,4,5\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - B$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{1,2\}$
④ $\{2,3\}$ ⑤ $\{2,3,4\}$

해설

$U = \{1,2,3,4,5\}$ 이므로 $(A \cup B) - B = \{1,2,3,4,5\} - \{3,4,5\} = \{1,2\}$ 이다.

2. $A=\{1,\ 2\}$, $B=\{x+y \mid x \in A,\ y \in A\}$, $C=\{xy \mid x \in A,\ y \in A\}$일 때, 집합 $A \cup (B-C)$의 부분집합의 개수를 구하면?

① 3 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

$B=\{2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{1,\ 2,\ 4\}$

$\therefore\ B-C=\{3\}$

$\therefore\ A \cup (B-C)=\{1,\ 2,\ 3\}$ 부분집합의 개수는 $2^3=8$ (개)이다.

3. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

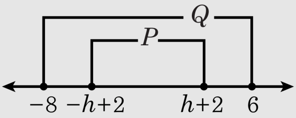
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

p : $2-h \le x \le 2+h$

q : $-8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

4. 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q$ ⋯⋯ ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$ ⋯⋯ ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p$ ⋯⋯ ㉢
㉠ , ㉡ 에서 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r$ ⋯⋯ ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
$\therefore$ 필요충분조건

5. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

ab 와 $\frac{4}{ab}$ 가 양수이므로

$$ab + \frac{4}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} = 4$$

$$\therefore ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 4 + 5 = 9$$

6. 부등식 $x^2+2y^2+3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x-2y+3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x-2y+3z)^2$

$=\left\{x+\sqrt{2}(-\sqrt{2}y)+\sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2+(-\sqrt{2}y)^2+(\sqrt{3}z)^2\right\}$

$=6(x^2+2y^2+3z^2) \le 144$

$\therefore \ -12 \le x-2y+3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2+2y^2+3z^2=24$

즉, $x=-y=\pm 2$일 때 등식이 성립한다.

7. 다음 중 정의역이 $\{0, 1, 2\}$인 함수 f의 그래프가 될 수 있는 것은?

① $\{(0, 1), (1, 2)\}$

② $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

③ $\{(1, 2), (1, 0), (2, 2)\}$

④ $\{(0, 1), (0, 2), (2, 0)\}$

⑤ $\{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

해설

$f(0) = a,\ f(1) = b,\ f(2) = c$라 하면,
함수 f의 그래프는
$(0, a), (1, b), (2, c)$의 꼴이어야 한다.

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여

$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$

$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$

$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x - 21 = x$

$\therefore x = 3$

9. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2$를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2$ 에서

$\frac{x+4}{2} = 2$ 이면 $x = 0$ 이므로

$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$

10. $f(x) = \begin{cases} x+5 & (x \geq 0) \\ -x^2+3 & (x < 0) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 f 에 대하여 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하시오.

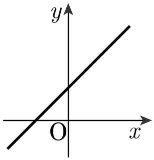
▶ 답 :

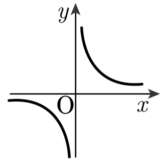
▷ 정답 : 6

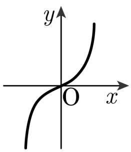
해설

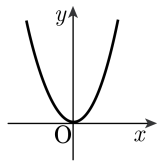
$(f \circ f)(-1) = f(-(-1)^2+3) = f(2) = 2+5 = 7$
$f^{-1}(2) = t$ 라 하면 $f(t) = 2$
그런데 $x+5 \geq 5$ $(\because\ x \geq 0)$ 이고
$-x^2+3 < 3$ $(\because\ x < 0)$ 이므로 $-t^2+3 = 2$
$\therefore\ t = f^{-1}(2) = -1$ $(\because\ t < 0) \cdots$ ㉠
따라서 $(f \circ f)(-1) + f^{-1}(2) = 7 + (-1) = 6$

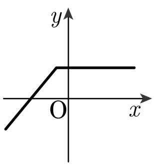
11. 다음 중 임의의 실수 x에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$를 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형으로 적당한 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$이다.
그런데 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
$f(x) = f^{-1}(x)$를 만족하려면
함수 $f(x)$는 일대일 대응이고
$y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이어야 한다.

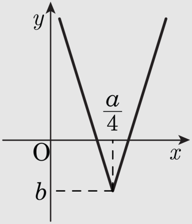
12. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left|4\left(x - \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$\frac{a}{4} = 3,\ b = -2$

$\therefore\ a = 12,\ b = -2 \qquad \therefore\ a + b = 10$

13. 수직선 위에 세 점 $A(-2)$, $B(1)$, $C(2)$가 있다. 수직선 위에 한 점 P 를 잡아 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P 의 좌표를 구하면?

① $P(-2)$ ② $P(-1)$ ③ $P(0)$

④ $P(1)$ ⑤ $P(2)$

해설

점 P 의 좌표를 $P(x)$ 라 하면

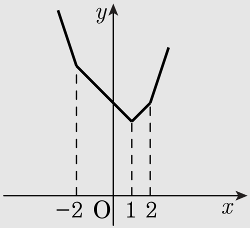
$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=|x+2|+|x-1|+|x-2|$

$y=|x+2|+|x-1|+|x-2|$ 의

그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x=1$ 에서 최솟값을 가진다.

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $P(1)$ 이다.



14. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}\cdots①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)$

$=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z$

$=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)$

$=(z-y)\left\{x^2-(z+y)x+zy\right\}$

$=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

15. 분수식 $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2x-1}{x-1}-\dfrac{3x^2+4x+2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $-\dfrac{x-2}{x(x-1)}$ ② $\dfrac{x+2}{x(x+1)}$ ③ $\dfrac{x-2}{x(x+1)}$
④ $\dfrac{x+2}{x(x-1)}$ ⑤ $\dfrac{x-2}{x(x-1)}$

해설

$\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$,

$\dfrac{2x-1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1}$,

$\dfrac{3x^2+4x+2}{x^2+x}=3+\dfrac{x+2}{x^2+x}$ 이므로

$$(\text{준식})=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(2+\frac{1}{x-1}\right)-\left(3+\frac{x+2}{x^2+x}\right)$$

$$=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x(x+1)}$$

$$=\frac{-x(x-1)+x(x+1)-(x-1)(x+2)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{-x^2+x+x^2+x-x^2-x+2}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{-x^2+x+2}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-(x^2-x-2)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=-\frac{x-2}{x(x-1)}$$

16. 자연수 a, b, c, d에 대하여 $\dfrac{75}{23} = a + \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c + \dfrac{1}{d}}}$ 일 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$$\frac{75}{23} = 3 + \frac{6}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{6}}$$

$$= 3 + \frac{1}{3 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}$$

$\therefore\ a = 3,\ b = 3,\ c = 1,\ d = 5$

$\therefore\ a + b + c + d = 12$

17. $2x-y+z=0$, $x-2y+3z=0$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0 \cdots ㉠$

$x-2y+3z=0 \cdots ㉡$

$㉠ \times 2 - ㉡ : 3x = z$

$\therefore x = \dfrac{z}{3},\ y = \dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2} = \dfrac{3}{5}$ $\therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

18. 유리함수 $y = \dfrac{4x+3}{x+2}$의 그래프는 함수 $y = \dfrac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = \dfrac{4x+3}{x+2} = \dfrac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \dfrac{-5}{x+2}$ 이므로

$y = \dfrac{-5}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 -2,

y축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$a+b+c = (-5)+(-2)+4 = -3$

19. 유리함수 $f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$ 의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 실수 k의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$가 직선 $y=x$에 대해 대칭이므로

$f(x)=f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x)=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\dfrac{kx}{x+3}=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\therefore\ k=-3$

20. $y = \sqrt{x-1} + 2$의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3(x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5(x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2(x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x - 1$

$\therefore\ x = y^2 - 4y + 5\ (y \geq 2)$

x와 y를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$

21. $a_1 = 1,\ a_{10} = 37$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$이므로

$(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$

$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$

$= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200$

22. 100 이하의 자연수 중에서 3 으로 나누었을 때 나머지가 2 인 수의 합은?

① 1600 ② 1620 ③ 1650 ④ 1680 ⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면
$2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 98$ 이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열을 이룬다.

이 등차수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, 일반항 a_n은

$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$

이때, 끝항 98 은 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98 은 제 33 항이다.

따라서 구하는 합을 S 라 하면

$$S = \frac{33(2+98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$$

23. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 100\}$의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A라 할 때 $n(A)$를 구하면?

㉠ $2 \in A$
㉡ $m,\ n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$

$2 \in A,\ 2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$

이와 같은 과정을 반복하면

$2^4 \in A,\ 2^5 \in A,\ 2^6 \in A, \cdots$

따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$ 이다.

24. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 의 부분집합 중 원소가 짝수로만 이루어진 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 7 개

해설

집합 A 의 원소 중 짝수는 2, 4, 6 이므로 $\{2,\ 4,\ 6\}$ 의 부분집합 중에서 $\varnothing$ 을 제외한 $2^3 - 1 = 7$(개) 이다.

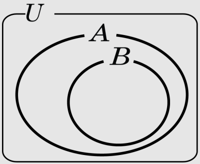
25. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $A^c \cap B = \varnothing$를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$	㉡ $A \cup B = B$	㉢ $A^c \subset B^c$
㉣ $A \cap B = B$	㉤ $A \cup B^c = U$	㉥ $A - B = \varnothing$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \varnothing$이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore\ B \subset A$



㉠ $A = B$는 $B \subset A$, $A \subset B$이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A^c \subset B^c$

㉣ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉤ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개

26. 두 집합 $A = \{3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$, $B = \left\{x | x\text{는 } 3 \le x \le 5\text{인 자연수}\right\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8 개

해설

$B = \{3,\ 4,\ 5\}$

$(A - B) \cup X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$

$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\{6,\ 8,\ 9,\ 11\} \subset X \subset \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$

집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 6, 8, 9, 11 을 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore\ 2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)

27. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$를 $A \triangle B = (A \cap B^c)^c$로 정의할 때, 다음 중 $(A \triangle B) \triangle B$와 같은 것은?

① $A \cup B$ ② $A \cap B$ ③ $A - B$ ④ A ⑤ B

해설

$$A \triangle B = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$$

$$\begin{aligned} \therefore (A \triangle B) \triangle B &= (A^c \cup B)^c \cup B = (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) = A \cup B \end{aligned}$$

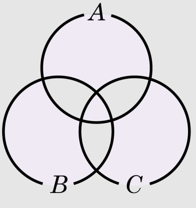
28. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 ◎을 $X◎Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 로 정의하자. 1 에서 30까지의 자연수 중 2 의 배수, 3 의 배수, 5 의 배수의 집합을 각각 A, B, C 라고 할 때, $(A◎B)◎C$ 의 원소의 개수는?

① 11 개　　② 12 개　　③ 13 개　　④ 14 개　　⑤ 15 개

해설

$$\begin{aligned}(X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) &= (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c \\ &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ &= (X - Y) \cup (Y - X)\end{aligned}$$

이 정의로부터 $(A◎B)◎C$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



이때, $A \cap B$는 6 의 배수의 집합,
$B \cap C$는 15 의 배수의 집합,
$C \cap A$는 10 의 배수의 집합,
$A \cap B \cap C$는 30 의 배수의 집합이므로
$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(C) = 6,$
$n(A \cap B) = 5,\ n(B \cap C) = 2,\ n(C \cap A) = 3,$
$n(A \cap B \cap C) = 1$

$$\therefore n\left\{(A◎B)◎C\right\} = n(A) + n(B) + n(C)$$
$$- 2\left\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\right\}$$
$$+ 4 \cdot n(A \cap B \cap C)$$
$$= 15 + 10 + 6 - 2(5 + 2 + 3) + 4$$
$$= 15$$

29. 세 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \to \sim q$　　② $q \to p$　　③ $q \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim p \to \sim r$

해설

$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$

$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$

$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.

$\therefore$ 대우 : $\sim r \to \sim p$ 도 참이다.

30. 다음은 정수 a, b 에 대하여 명제 'ab 가 짝수이면 a 또는 b 가 짝수이다.' 를 증명한 것이다.

a, b 를 모두 홀수라 하면 $a = 2m-1, b = 2n-1$ $(m, n$ 은 정수$)$ 로 나타낼 수 있으므로 $ab = (2m-1)(2n-1) = 4mn-2m-2n+1$ $= 2(2mn-m-n)+1$ 이때, $2mn-m-n$이 $\boxed{}$ 이므로, ab 는 $\boxed{}$이다. 따라서, 'a, b 가 홀수이면 ab 는 홀수이다.' 는 참이고 이것은 주어진 명제의 $\boxed{}$이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 과정에서 빈칸에 알맞은 것을 순서대로 나열한 것은?

① 자연수, 홀수, 역
② 정수, 짝수, 대우
③ 정수, 홀수, 대우
④ 유리수, 짝수, 이
⑤ 유리수, 홀수, 이

해설

a, b 를 모두 홀수라 하면
$a = 2m-1, b = 2n-1$ $(m, n$ 은 정수$)$ 로 나타낼 수 있으므로

$$ab = (2m-1)(2n-1) = 4mn-2m-2n+1$$
$$= 2(2mn-m-n)+1$$

이때, $2mn-m-n$ 이 $\boxed{\text{정수}}$이므로 ab 는 $\boxed{\text{홀수}}$이다. 이것은 주어진 명제의 $\boxed{\text{대우}}$가 참임을 증명하여 주어진 명제가 참임을 증명한 것이다.

31. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3　　② 2　　③ -1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}$$
$$=\frac{1+3}{1-3}=-2$$
$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}$$
$$=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$
$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$
$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\frac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\frac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수) 은

$3,\ -2,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times499+2)=f(2)=-2$

32. 양의 실수에서 정의된 두 함수 $f(x)=x^2+2x$, $h(x)=\dfrac{100x+200}{f(x)}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $(h\circ g)(8)$ 의 값은?

① 10　② 20　③ 30　④ 40　⑤ 50

해설

$g(8)=k$ 라고 하면 $f(k)=8$ 이다.

$\Rightarrow k^2+2k=8$

$\Rightarrow k=-4, 2 \Rightarrow k=2(\because\ k>0)$

$\therefore\ (h\circ g)(8)=h(g(8))=h(2)$

$$=\frac{100\times 2+200}{f(2)}=50$$

33. $f(x)$는 유리수를 계수로 하는 x의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$일 때, $a - b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ 0 ⑤ 3

해설

$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}} = 2+\sqrt{3}$

$\therefore\ f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2+\sqrt{3})$

$= (2+\sqrt{3})^2 + a(2+\sqrt{3}) + b$

$= (7+2a+b) + (4+a)\sqrt{3} = 0$

그런데, $7+2a+b,\ 4+a$는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$7+2a+b = 0,\ 4+a = 0 \quad \therefore\ a = -4,\ b = 1$

$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2+\sqrt{3}$은 $x^2+ax+b = 0$의 한 근이고, $a,\ b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$

$\therefore\ a - b = -4 - 1 = -5$

34. 함수 $y=\dfrac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭일 때, $a-b$의 값은? (단, $a<0$)

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$$y=\frac{2x+5}{x+1}=\frac{2(x+1)+3}{x+1}=\frac{3}{x+1}+2$$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점$(-1,\ 2)$를 지나고

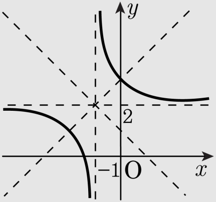
기울기가 ±1인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y-2=-(x+1)$

$\therefore\ y=-x+1$

따라서 $a=-1,\ b=1$이므로 $a-b=-2$



35. 전체집합 $U=\{(x,\ y)\mid x>0,\ y>0\}$ 의 부분집합

$A=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y\ge \frac{1}{x}\right\}$, $B=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y<\frac{1}{x}\right\}$, $C=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y\ge \frac{2}{x}\right\}$,

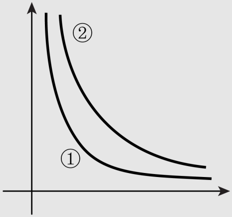
$D=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ y<\frac{2}{x}\right\}$ 에 대하여 다음 포함관계 중 옳지 않은 것은?

① $A\supset C$　　② $B\supset D$　　③ $A\cap B=\varnothing$

④ $C\cap D=\varnothing$　　⑤ $A-B=A$

해설

$y=\frac{1}{x}\cdots$①, $y=\frac{2}{x}\cdots$② 의 그래프는 다음 그림과 같다.



A 의 영역이 C 의 그것을 포함하므로 ① 은 옳다.

D 의 영역이 B 의 그것을 포함하므로 ② 는 옳지 않다.

A 와 B 는 만나지 않으므로 ③은 옳다.

C 와 D 는 만나지 않으므로 ④는 옳다.

A 와 B 는 만나지 않으므로 ⑤ 역시 옳다.

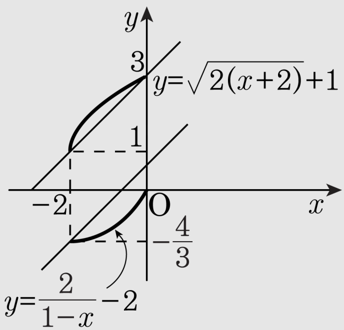
36. 정의역이 $\{x|-2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x+r$ 의 그래프가
$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

37. 등차수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_p,\ 100,\ y_1,\ y_2, \cdots,$ $y_q,\ 105$의 합이 2375가 되도록 하는 $p,\ q$의 값은?

① $p=11,\ q=3$　② $p=12,\ q=4$　③ $p=15,\ q=3$
④ $p=16,\ q=4$　⑤ $p=17,\ q=5$

해설

(i) 두 수열 $85,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots,\ x_p,\ 100$과 $100,\ y_1,\ y_2, \cdots, y_q,\ 105$는 공차가 같은 등차수열이므로

$100=85+(p+1)d,\ 105=100+(q+1)d$

$\dfrac{100-85}{p+1}=\dfrac{105-100}{q+1}$

$15(q+1)=5(p+1)\quad \therefore\ p=3q+2$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p+q+3$인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\dfrac{(p+q+3)(85+105)}{2}=2375$

$p+q+3=25\quad \therefore\ p+q=22 \cdots ㉠$

이때, (i)에서 $p=3q+2$이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면 $p=17,\ q=5$

38. x 의 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대해 $A = \{x \mid f(x) - g(x) = 0\}$, $B = \{x \mid f(x) = 0,\ g(x) = 0\}$, $C = \{x \mid \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0\}$ 일 때, 다음 중 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계로 옳은 것을 고르면?

① $A \subset B \subset C$　　② $A \subset C \subset B$　　③ $B \subset A \subset C$

④ $B \subset C \subset A$　　⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$A = \{x \mid f(x) - g(x) = 0\} = \{x \mid f(x) = g(x)\}$

$B = \{x \mid f(x) = 0,\ g(x) = 0\}$

$\quad = \{x \mid f(x) = g(x) = 0\}$

$\therefore\ B \subset A \quad \cdots$ ㉠

$C = \{x \mid \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 0\}$

$\quad = \{x \mid f(x) = g(x)$ 또는 $f(x) = -g(x)\}$

$\therefore\ A \subset C \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $B \subset A \subset C$

39. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합 중에서 다음 두 조건을 동시에 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라. (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

> (가) 집합 X 는 적어도 하나의 홀수를 포함한다.
>
> (나) $n(X) \leq 5$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 112 개

해설

전체집합 U 의 부분집합의 개수는
$2^7 = 128$ (개)
이 중 홀수를 포함하지 않는 집합의 개수는
$2^{7-4} = 2^3 = 8$(개)
따라서 (가)를 만족하는 집합 X 의 개수는
$128 - 8 = 120$(개)
이때, $n(X) = 6$ 인 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $\cdots$, $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 7개로 이들은 모두 조건 (가)를 만족한다.
또 $n(X) = 7$ 인 집합 X는 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 1개로 이것도 역시 조건 (가)를 만족한다.
따라서 구하는 집합 X 의 개수는 $120 - (7 + 1) = 112$(개)

40. $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ 이다. $n(A\cap B\cap X)=1$, $B\cup X=B$ 인 집합 X 는 모두 몇 개인가?

① 21 개 ② 22 개 ③ 23 개 ④ 24 개 ⑤ 25 개

해설

$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6\}$, $B\cup X=B$ 에서 $X\subset B$,
즉 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중 2, 4, 6 중 어느 하나만 원소로 갖는 집합이므로
2, 4, 6 중 2 만을 원소로 가질 때 $2^3=8$
4, 6 만을 원소로 가질 때에도 마찬가지 이므로
집합 X 의 개수는 $8\times3=24$ (개)

41. 두 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$ 에 대하여 $A * B = A - (A \cap B)$ 라 할 때, $B * (A * B)$ 의 집합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

해설

$A \cap B = \{4,\ 8\}$

$A * B = \{2,\ 6\}$

$B \cap (A * B) = \varnothing$

$B * (A * B) = B = \{4,\ 8,\ 12,\ 16\}$

42. 임의의 두 집합 X, Y에 대하여, 연산 $\triangle$을 $X \triangle Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$로 정의한다.1에서 30까지의 정수 중 2의 배수, 3의 배수, 5의 배수의 집합을 차례로 A, B, C라 할 때, $(A \triangle B) \triangle C$의 원소의 개수를 구하면?

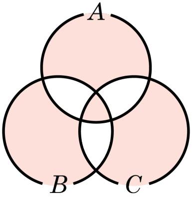
① 10개 ② 13개 ③ 15개 ④ 17개 ⑤ 19개

해설

$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y) = (X - Y) \cup (Y - X)$

$(A \triangle B) \triangle C$ 의 벤다이어그램은 다음과 같다.

$\therefore\ n((A \triangle B) \triangle C) = n(A) + n(B) + n(C) - 2\{n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)\} + 4n(A \cap B \cap C) = (15 + 10 + 6) - 2(5 + 2 + 3) + 4$
$= 15$(개)



43. 긴 나무막대기 위에 이 막대기의 길이를 10등분, 12등분, 15등분하는 세 종류의 눈금이 새겨져 있다. 이 눈금을 따라 막대기를 자르면 모두 몇 토막이 나겠는가?

① 20토막 ② 28토막 ③ 36토막
④ 48토막 ⑤ 60토막

해설

나무막대기의 길이를 1이라 하면 세 종류의 눈금의 간격은 각각 $\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$이다.

즉, $\frac{6}{60}, \frac{5}{60}, \frac{4}{60}$이므로 60이하의 수 중에서 4의 배수 또는 5의 배수 또는 6의 배수인 수의 개수를 구하면 된다. 60이하의 자연수 중 4의 배수, 5의 배수, 6의 배수의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(A)=15$, $n(B)=12$, $n(C)=10$, $n(A\cap B)=3$, $n(B\cap C)=2$, $n(C\cap A)=5$, $n(A\cap B\cap C)=1$

$\therefore\ n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=15+12+10-3-2-5+1$

$=28$

44. $a \geq 1$, $b \geq 1$이고 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=4$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M \cdot m$의 값을 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

$a>0,\ b>0$이므로

$\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} = 2^4\sqrt{ab}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=4$이므로 $2^4\sqrt{ab} \leq 4$

$\therefore\ \sqrt[4]{ab} \leq 2$

$\therefore\ \sqrt{ab} \leq 4$

따라서, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \geq \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \cdots ①$

$(\because\ \sqrt{ab} \leq 4$이므로 $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{1}{4})$

한편, $a \geq 1$, $b \geq 1$이므로

$0 < \frac{1}{a} \leq 1,\ 0 < \frac{1}{b} \leq 1$

$\therefore 0 < \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 2 \cdots ②$

①, ②에서 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leq 2$

$\therefore\ M=2,\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore\ M \cdot m = 1$

45. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$과 $x^2 - bx + a = 0$이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$의 두 근을 α, β, $x^2 - bx + a = 0$의 근을 γ, σ라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma}$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,

$\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$를 만족한다.

$\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = b$, $\gamma + \sigma = b$,

$\gamma\sigma = a(a, b > 0)$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{9(\gamma + \delta)}{\gamma\delta}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 6$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} \geq 6$$

46. 집합 $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f를 $f(x) = r$(r은 $3x$를 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, f^n이 항등함수가 되는 최소의 자연수 n의 값은? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n은 자연수)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

함수 f의 대응을 조사해 보면

$1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 1$

$2 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2$

$5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} f\ 5$

$\therefore\ f^4 = f^8 = f^{12} = \cdots = I$(항등함수)

$\therefore$ 최소의 자연수는 4

47. $a+b+c=1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① a는 1일 수 없다.

② a, b, c중 꼭 하나만 1이다.

③ a, b, c중 꼭 두 개만 1이다.

④ a, b, c중 적어도 하나는 1이다.

⑤ a, b, c가 모두 1이 될 수는 없다.

해설

$a+b+c=1 \quad \therefore \ a+b+c-1=0 \ \cdots ㉠$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$, $\quad \dfrac{ab+bc+ca}{abc}=1$

$\therefore \ abc-ab-bc-ca=0 \ \cdots ㉡$

㉠ + ㉡에서 $abc-ab-bc-ca+a+b+c-1=0$

$1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc=0$

$\therefore \ (1-a)(1-b)(1-c)=0$

따라서 a, b, c중 적어도 하나는 1이다.

48. $a = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}},\ b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ 일 때, a^2+b^2 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ $10\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{5}$

해설

$a = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}},\ b = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ 이므로

$a^3 = 7-5\sqrt{2},\ b^3 = 7+5\sqrt{2} \quad \therefore\ a^3+b^3 = 14$

그리고 $ab = \sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})} = -1$ 이므로

$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$ 에서 $a+b=t$ 라 하면

$t^3 = 14-3t,\ t^3+3t-14 = 0$

$(t-2)(t^2+2t+7) = 0$

$\therefore\ t = 2\ (\because\ t^2+2t+7 \neq 0)$

$\therefore\ a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = 2^2+2 = 6$

49. 곡선 $y^2-2y+4x-3=0$에 x축 위의 점 $(a,\ 0)$으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a의 값을 정하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

곡선 $y^2-2y+4x-3=0$에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,

그 접선은 점$(a,\ 0)$ 을 지나므로 $y=m(x-a)$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$(mx-am)^2-2(mx-am)+4x-3=0$

$m^2x^2-2(am^2+m-2)x+a^2m^2+2am-3=0$

$\frac{D}{4}=(am^2+m-2)^2-m^2(a^2m^2+2am-3)=0$

정리하면, $(1-a)m^2-m+1=0$

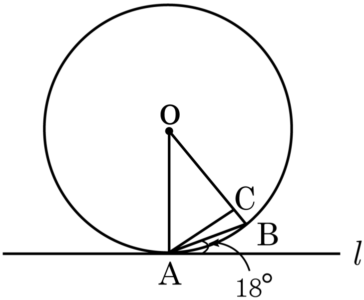
m의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta=-1$이어야 하므로

$\alpha\beta=\frac{1}{1-a}=-1$

$\therefore a=2$

50. 원 O 위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 $18°$이다. 선분 OB 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는?



① $68°$ ② $72°$ ③ $76°$ ④ $80°$ ⑤ $84°$

해설

접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 $18°$이므로 $\angle AOC = 36°$이다.
$\angle OAC = \alpha$, $\angle ACO = \beta$라 하면, $\alpha + \beta = 144°$이고,
가장 긴 변이 선분 OA이므로 가장 큰 각은 β이다.
(i) $36°$, α, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우
$2\alpha = \beta + 36° = (144° - \alpha) + 36° = 180° - \alpha$
$\alpha = 60°$, $\beta = 84°$
(ii) α, $36°$, β의 순서로 등차수열을 이루는 경우
$2(\alpha + \beta) = 72°$가 되므로 모순이다.
(i), (ii)에 의해 $\beta = 84°$