

1. $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ 의 제 10항은?

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{1}{11}$

③ $\frac{1}{110}$

④ $\frac{1}{111}$

⑤ $\frac{1}{1010}$

해설

$$\frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{1}{110}$$

2. 첫째항이 12, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n + 19$

② $-7n - 7$

③ $-7n - 12$

④ $7n - 5$

⑤ $7n + 12$

해설

$$a_n = 12 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 19$$

3. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = -2n - 2$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -1, d = 2$

② $a = -1, d = -2$

③ $a = -2, d = -2$

④ $a = -4, d = -2$

⑤ $a = -4, d = 2$

해설

$$a_n = -2n - 2 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = -2 \cdot 1 - 2 = -4,$$

$$a_2 = -2 \cdot 2 - 2 = -6 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = -2$$

4. 다음 등차수열의 제 20 항을 구하여라.

131, 137, 143, 149, 155, 161,...

▶ 답 :

▷ 정답 : 245

해설

주어진 등차수열의 제 1 항을 a , 공차를 d 라고 하자.

$a = 131$, $d = 137 - 131 = 6$ 이므로

$a_n = 131 + (n - 1) \cdot 6 = 6n + 125$

$\therefore a_{20} = 6 \cdot 20 + 125 = 245$

5. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

-4, (가), 10, (나), (다)

① 1, 12, 14

② 3, 17, 24

③ 3, 17, 20

④ 7, 17, 24

⑤ 7, 13, 16

해설

-4와 10의 등차중항은 $\frac{-4+10}{2} = 3$, 이 수열의 공차는 7이다.
따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 3, 17, 24이다.

6. 세 수 -17 , x , 1 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x 는 -17 과 1 의 등차중항이므로
 $2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore x = -8$

7. 첫째항이 -4 , 공차가 3 인 등차수열의 첫째항부터 제 17 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 340

해설

$$S_{17} = \frac{17 \{ 2 \cdot (-4) + (17 - 1) \cdot 3 \}}{2} = \frac{680}{2} = 340$$

8. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합 $S_{10} = 100$ 이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합 $S_{20} = 200$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

S_{10} 은 첫째항부터 제10까지의 합이고, S_{20} 은 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} &= S_{20} - S_{10} \\ &= 200 - 100 = 100 \end{aligned}$$

9. 다음은 집합이 아닌 것을 집합이 되도록 적절히 고친 것이다. 잘못 고친 것을 모두 골라라.

- ㉠ 큰 자연수의 모임
1보다

㉡ 우리 반에서 몸무게가 무거운 학생들의 모임
50 kg 이상인

㉢ 30에 가까운 수들의 모임
20

㉣ 세계에서 높은 산들의 모임
가장

㉤ 공부를 잘하는 학생들의 모임
못하는

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

해설

㉢ 20 에 가까운 수들의 모임이라고 하더라도, 그 대상을 분명히 알 수가 없다.
예를 들어, ‘20 과의 거리가 2 이하인 수’ 와 같이 분명한 기준이 있어야 한다.

㉤ 공부를 못하는 학생들의 모임이라고 하더라도 그 대상을 분명히 알 수가 없다.
예를 들어, ‘수학 점수가 30 점 이하인 학생’ 과 같이 분명한 기준이 있어야 한다.

10. 다음 중 $A \subset B$ 인 관계인 것은?

- ① $A = \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 12\text{의 약수}\}$
- ② $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\}, B = \{3, 5, 7, 9\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\}, B = \{1, 2, 4\}$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 1\text{의 배수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$
- ⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

해설

- ① $A \subset B$
- ② $B \subset A$
- ③ $B \subset A$
- ④ $B \subset A$
- ⑤ 포함 관계가 없다.

11. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 8\text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 12\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $A \cap (B \cup C)$ 는?
- ① $\{4, 8\}$

② $\{1, 2, 4, 8\}$

③ $\{1, 2, 6\}$

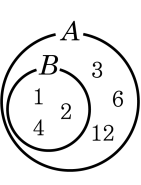
④ $\{1, 2, 3, 6\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐 보면
 $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ 가 된다.
집합 A 와의 공통 원소를 찾으면 $\{1, 2, 3, 6\}$ 이다.

12. 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(답2개)



- ① $A = \{3, 6, 12\}$ ② $B = \{1, 2, 4\}$ ③ $A \subset B$
④ $A \cap B = A$ ⑤ $A \cup B = A$

해설

- ① 집합 A 는 집합 B 부분을 포함하므로 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이다.
③ 집합 A 는 집합 B 부분을 포함하므로 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이다.

13. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 25 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A - B = \{9, 21, 24\}$, $B - A = \{3, 15\}$, $A^c \cap B^c = \{12\}$ 일 때, 집합 $A \cap B$ 는?
- ① $\{3, 6\}$ ② $\{3, 6, 12\}$ ③ $\{3, 18\}$
④ $\{6, 12\}$ ⑤ $\{6, 18\}$

해설

$U = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

U

A

9

21

24

B

3

15

6

18

$\therefore A \cap B = \{6, 18\}$

14. 두 집합 $n(A) = 15, n(B) = 11, n(A \cap B) = 6$ 일 때, $n(A - B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 15 - 6 = 9$$

15. 다음 명제의 대우로 알맞은 것은?

‘ $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.’

- ① $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.
- ② a, b 모두 짝수이거나 또는 홀수이면 $a+b$ 가 짝수이다.
- ③ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 짝수이다.
- ④ a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이면, $a+b$ 가 홀수이다.
- ⑤ a, b 중 하나는 짝수, 다른 하나는 홀수이면, $a+b$ 가 홀수이다.

해설

대우 : $a+b$ 가 짝수이면 a, b 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이다.

16. $a > 0$ 일 때, $2a + \frac{1}{2a}$ 의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$a > 0$ 이므로 $2a > 0$ 산술기하평균의 관계로부터

$$2a + \frac{1}{2a} \geq 2 \cdot \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

17. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$ 이면
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$ 이다.
위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
 $f(x) = 1$ 은 부적당
 $\therefore f(0) = 0$

18. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x < 0) \end{cases} \text{ 가 } f^{-1}(2) = -3 \text{ 을 만족시킬 때, } f(5) \text{ 의}$$

값은 얼마인가?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$f^{-1}(2) = -3$ 에서 $f(-3) = 2$ 이므로

$$f(-3) = 3 + k = 2$$

$$\therefore k = -1 \text{ 이므로 } f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(5) = 5 - 1 = 4$$

19. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢
- ④ ㉡,㉢

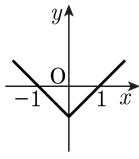
⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

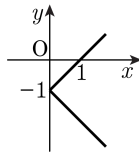
㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

20. 다음 중 함수 $|y| = x - 1$ 의 그래프를 구하면?

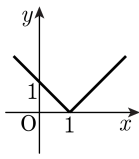
①



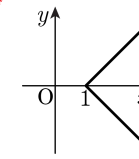
②



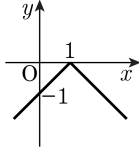
③



④

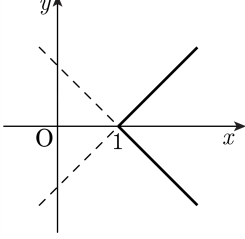


⑤



해설

$|y| = x - 1$ 에서
 $y \geq 0$ 일 때,
 $y = x - 1$
 $y < 0$ 일 때,
 $-y = x - 1, y = -x + 1$
따라서, 그래프는 다음
그림과 같다.



21. 등식 $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} =$
 $\frac{(\quad)}{x(x+4)}$ 를 성립시키는 () 속에 들어갈 알맞은 수는?
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \text{ 이므로} \\ (\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} \\ &= \frac{x+4-x}{x(x+4)} \\ &= \frac{4}{x(x+4)} \end{aligned}$$

22. $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{x^2 + 6xy}$ 의 값은?

① $\sqrt{3} + 1$

② $\sqrt{3} - 1$

③ $2\sqrt{3} + 1$

④ $2\sqrt{3} - 1$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$x^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3} = 7 - 2\sqrt{12}$$

$$6xy = 6(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 6 \text{ 을써}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 6xy} &= \sqrt{13 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{12} - 1)^2} \\ &= 2\sqrt{3} - 1\end{aligned}$$

23. $2 + \sqrt{3} = \sqrt{a + b\sqrt{3}}$ (a, b 는 유리수) 일 때, $a - b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$2 + \sqrt{3} = \sqrt{a + b\sqrt{3}}$$

양변을 제곱하면

$$4 + 3 + 4\sqrt{3} = a + b\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 7, b = 4 \quad \therefore a - b = 7 - 4 = 3$$

24. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ 이므로 } f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2} \text{ 의}$$

역함수를 구하면

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore 2+3+4=9$$

25. 함수 $y = \sqrt{-2x-2} - 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 0 ⑤ 3

해설

$y = \sqrt{-2x-2} - 2 = \sqrt{-2(x+1)} - 2$ 의
그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축 방향으로 -2 만큼
평행이동한 것이다.
 $\therefore m+n = -1-2 = -3$

26. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항

② 제 10항

③ 제 11항

④ 제 12항

⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

27. 다음 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

- ㉠

$\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 약수}\} \subset \{1, 2, 3\}$
- ㉡

$\{a, b\} \in \{a, b, c\}$
- ㉢

$0 \in \emptyset$
- ㉤

$\emptyset \in \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$
- ㉥

$\emptyset \subset \{1\}$
- ㉦

$\emptyset \subset \emptyset$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉥

▷ 정답 : ㉦

해설

- ㉡ $\{a, b\} \in \{a, b, c\}$ 에서 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$ 를 써야 한다.
- ㉢ $0 \in \emptyset$ 에서는 $\emptyset \subset \{0\}$ 이어야 한다.
- ㉤ $\emptyset \in \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$ 에서는 $\subset$ 를 써야한다.
- ㉦ 공집합($\emptyset$)은 모든 집합의 부분집합이다.

28. $\{2, 3\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7\}$ 이고 원소의 개수가 4 개인 집합 X 의 원소들의 합은?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

$\{2, 3\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로
원소로 2, 3을 포함하는 $\{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 4 개인 집합을 구하면 된다.
원소 2, 3을 제외한 $\{5, 7\}$ 의 부분집합은 $\emptyset, \{5\}, \{7\}, \{5, 7\}$ 의 4개가 있으므로, 원소 2, 3을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합에는 $\{2, 3\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}$ 이 있다. 이 중 원소의 개수가 4 개인 것은 $\{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 원소의 합은 $2+3+5+7=17$ 이다.

29. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{A - (B - A^c)^c\} \cup (B - A)$ 를 간단히 하면?

① A

② B

③ $B - A$

④ $A \cup B$

⑤ $A \cap B$

해설

$$\begin{aligned} A - (B - A^c)^c &= A - (B \cap A)^c \\ &= A \cap (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \{A - (B - A^c)^c\} \cup (B - A) &= (A \cap B) \cup (B - A) \\ &= B \end{aligned}$$

30. 자연수 k 의 양의 배수의 집합을 A_k 라 할 때, 다음 중 $(A_6 \cup A_{12}) \cap (A_9 \cup A_{18})$ 과 같은 집합은?

- ① A_3
- ② A_6
- ③ A_9
- ④ A_{12}
- ⑤ A_{18}

해설

$A_6 = \{6, 12, 18, 24 \cdots\}$, $A_9 = \{9, 18, 27, 39 \cdots\}$, $A_{12} = \{12, 24, 36, 48 \cdots\}$, $A_{18} = \{18, 36, 54 \cdots\}$ 이므로 $(A_6 \cup A_{12}) \cap (A_9 \cup A_{18}) = A_6 \cap A_9 = A_{18}$

31. 100 명의 학생 중 영어를 좋아하는 학생은 65 명, 수학을 좋아하는 학생은 52 명이다. 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

- ① 65
- ② 52
- ③ 48
- ④ 35
- ⑤ 17

해설

전체집합을 U , 영어를 좋아하는 학생의 집합을 A , 수학을 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \cdots \textcircled{㉠}$
 $n(A \cup B) \leq n(U) = 100 \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $100 \geq 65 + 52 - n(A \cap B)$
 $n(A \cap B) \geq 65 + 52 - 100 = 17$
 $\therefore n(A \cap B) \geq 17$

(ii) $n(A \cap B) \leq n(A)$ 이고 $n(A \cap B) \leq n(B)$
따라서 $n(A \cap B) \leq 65$ 이고 $n(A \cap B) \leq 52$
 $\therefore n(A \cap B) \leq 52$
(i), (ii)에서 $17 \leq n(A \cap B) \leq 52$
 $\therefore M = 52, m = 17 \quad M - m = 35$

32. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 2 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

n 의 갯수는 2 개이다.

33. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

34. $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ 에 대하여 $f(25)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{45}{51}$

② $\frac{46}{51}$

③ $\frac{47}{51}$

④ $\frac{48}{51}$

⑤ $\frac{49}{51}$

해설

$$\therefore f(25) = \frac{2 \times 25 - 1}{2 \times 25 + 1} = \frac{49}{51}$$

35. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

36. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x + 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

37. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $g(f^{-1}(-3))$ 의 값을 구하여라. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f^{-1}(-3) = k$ 라 놓으면
 $f(k) = -3$ 이므로 $k = -1$ 이다.
그러므로 $g(f^{-1}(-3)) = g(-1) = 2$

38. $x^2 - 2x - 1 = 0$ 일 때, $3x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나누면 $x - \frac{1}{x} = 2$

따라서 구하는 식은

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 3 \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \right\} + 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 1 \\ &= 21\end{aligned}$$

39. 유리식 $\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c}$ 의 값을 k_1, k_2 라 할 때, $k_1 + k_2$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c} = k \text{라 하면}$$

(i) $3a+2b+c \neq 0$ 일 때,

$$k = \frac{6a+4b+2c}{3a+2b+c} = 2$$

(ii) $3a+2b+c = 0$ 일 때,

$$k = \frac{3a+2b}{c} = \frac{-c}{c} = -1$$

$$\therefore \{k_1, k_2\} = \{2, -1\}$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 1$$

40. $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 의 소수 부분을 각각 a , b 라고 할 때, $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{15} - 3\sqrt{5}$ ② $\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{15} + 2\sqrt{5}$
④ $\sqrt{15} - 2\sqrt{5}$ ⑤ $-\sqrt{15} + 3\sqrt{5}$

해설

$$1 < \sqrt{3} < 2 \text{에서 } \sqrt{3} = 1 + a$$

$$\therefore a = \sqrt{3} - 1$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \text{에서 } \sqrt{5} = 2 + b$$

$$\therefore b = \sqrt{5} - 2$$

$$a - \frac{1}{a} = \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \sqrt{3} - 1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 3}{2}$$

$$b + \frac{1}{b} = \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$

$$= \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right) = \frac{\sqrt{3} - 3}{2} \cdot 2\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{15} - 3\sqrt{5}$$

41. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

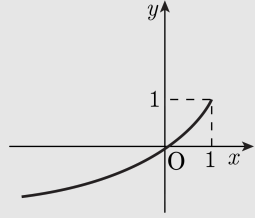
보기

- ㉠ $a = -1$ 이면 그래프는 제2사분면을 지난다.
- ㉡ $a > 0$ 이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.
- ㉢ $a < 0$ 이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.
- ㉤ $y = \sqrt{x} + 1$ 의 그래프와 만날 수 있다.

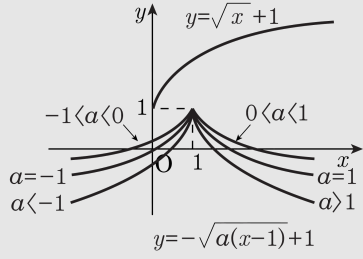
- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉤ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉤

해설

㉠ $a = -1$ 이면 주어진 무리함수는 $y = -\sqrt{-(x-1)} + 1$
 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a > 0$ 또는 $a < 0$ 일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \geq 0$ 이므로 치역은 $\{y|y \leq 1\}$
㉤ $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$ 의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x} + 1$ 의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



42. 무리함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 두 점 (2, 2), (3, 6)을 잇는 선분과 만나도록 하는 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 11개

해설

함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 (2, 2)를 지날 때
 $2 = \sqrt{2k}$, $2k = 4$
 $\therefore k = 2$
또, 함수 $y = \sqrt{kx}$ 의 그래프가 점 (3, 6)을 지날 때
 $6 = \sqrt{3k}$, $3k = 36$
 $\therefore k = 12$
따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는
 $2 \leq k \leq 12$ 이므로
정수 k 는 2, 3, 4, $\dots$, 12의 11개다.

43. 다음은 a, b, c, d, x, y, z, w 가 실수일 때, 부등식 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geq (ax + by + cz + dw)^2$ 이 성립함을 증명하는 과정의 일부이다. ㉠, ㉡ 부분에 들어갈 기호가 순서대로 적당한 것은?

[증명] 모든 실수 t 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.
 $(at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 + (dt - w)^2$ ㉠ 0
이것을 t 에 관하여 정리하면
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t^2 - 2(ax + by + cz + dw)t$
 $+ (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉡ 0
따라서 항상 성립하기 위해서는
 $(ax + by + cz + dw)^2 -$
 $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$ ㉢ 0..... (이하 생략)

- ① >, < ② ≥, < ③ ≤, > ④ ≤, ≥ ⑤ ≥, ≤

해설

생략

44. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}, 10$
$1, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{20}, 10$

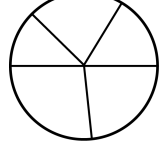
이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$ 의 값은?

- ① $\frac{10}{21}$
- ② $\frac{10}{20}$
- ③ $\frac{20}{11}$
- ④ $\frac{21}{11}$
- ⑤ 2

해설

$$a'_n = 1 + (n-1) \times d$$
$$a'_{12} = 1 + 11d = 10$$
$$d = \frac{9}{11}$$
$$\therefore a'_n = 1 + (n-1) \times \frac{9}{11}$$
$$b'_n = 1 + (n-1) \times d$$
$$b'_{22} = 1 + 21d = 10$$
$$d = \frac{9}{21}$$
$$\therefore b'_n = 1 + (n-1) \times \frac{9}{21}$$
$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1} = \frac{a'_{11}-a'_2}{b'_{11}-b'_2} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{9 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

45. 그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때, k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로
 $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d (d > 0)$ 라 하면
5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로
 $5a = 15^2\pi \quad \therefore a = 45\pi$
또, 주어진 조건부로부터

$$a + 2d = 2(a - 2d) \text{ 에서 } d = \frac{a}{6} = \frac{15\pi}{2}$$

따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는

$$a + 2d = 45\pi + 2 \cdot \frac{15}{2}\pi = 60\pi \quad \therefore k = 60$$

46. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 제 n 항까지의 합을 각각 A_n , B_n 이라 한다.
 $A_n : B_n = (3n + 6) : (7n + 2)$ 일 때, $a_7 : b_7$ 을 구하면? (단, n 은 자연수)

- ① 5 : 17
- ② 15 : 31
- ③ 17 : 9
- ④ 31 : 15
- ⑤ 49 : 50

해설

a_n 의 일반항을 $a + (n - 1)d_1$

b_n 의 일반항을 $b + (n - 1)d_2$ 로 놓으면

$$A_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d_1\},$$

$$B_n = \frac{n}{2} \{2b + (n - 1)d_2\}$$

$$\frac{2a + d_1n - d_1}{2b + d_2n - d_2} = \frac{3n + 6}{7n + 2} = \frac{3kn + 6k}{7kn + 2k},$$

$$d_1 = 3k, \quad 2a - d_1 = 6k(k \text{는 비례상수})$$

$$\text{따라서 } 2a = 9k, \quad a = \frac{9}{2}k$$

$$\therefore a_n = \frac{9}{2}k + (n - 1)3k$$

$$d_2 = 7k, \quad 2b - d_2 = 2k, \quad b = \frac{9}{2}k$$

$$\therefore b_n = \frac{9}{2}k + (n - 1)7k$$

$$\begin{aligned} \therefore a_7 : b_7 &= \left(\frac{9}{2}k + 18k\right) : \left(\frac{9}{2}k + 42k\right) \\ &= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31 \end{aligned}$$

47. 4와 6으로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 41400

해설

4와 6으로 나누어떨어지는 수는 4와 6의 최소공배수인 12로 나누어떨어지는 수이므로 $12n$ (n 은 자연수)의 꼴이다.

이때, $100 \leq 12n \leq 1000$ 이므로

$$8.\times\times\leq n\leq 83.\times\times$$

$$\therefore n=9,10,11,\cdots,83$$

그런데 $n=9$ 일 때, $12n=108$,

$n=83$ 일 때, $12n=996$ 이므로 조건을 만족하는 수는 첫째항이 108, 끝항이 996, 항수가 $83-8=75$ 인 등차수열이다.

$$\text{따라서 구하는 총합은 } \frac{75(108+996)}{2}=41400$$

48. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $-5 < d < -4$
㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$
㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$
 $S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$
 $10 - 2d + 4d > 0$
 $\therefore d > -5$
 $S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$
 $2(10 - 2d) + 9d < 0$
 $\therefore d < -4$
 $\therefore -5 < d < -4$ (참)
㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$
㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로
 $0 < 10 + 2d < 2$
즉, $0 < a_5 < 2$
 $a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$
 $-15 < 3d < -12$ 이므로
 $-5 < 10 + 3d < -2$
즉, $-5 < a_6 < -2$
 $\therefore a_5 > 0$, $a_6 < 0$ (참)
㉢ $a_1 = 10 - 2d$ 이므로
 $-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$
즉, $18 < a_1 < 20$
 a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$
 $a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\frac{9}{2}$
 $\therefore a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$
 $\therefore a_1 + a_9 = 2 \neq 0$ (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

49. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫 항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$ 이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p + q$ 의 값은?

- ① -43 ② -33 ③ -23 ④ -13 ⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$ 이고
 $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $\quad = (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\}$
 $\quad = 4n + p - 2$

 $a_n = 4n + p - 2$ 에 $n = 1$ 을 대입하면
 $a_1 = p + 1$ 이므로 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
 $b_1 = q + 5$ 이고
 $n \geq 2$ 일 때,
 $b_n = T_n - T_{n-1}$
 $\quad = (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\}$
 $\quad = 2qn + 5 - q$

 $b_n = 2qn + 5 - q$ 에 $n = 1$ 을 대입하면
 $b_1 = 5 + q$ 이므로 $\{b_n\}$ 은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
 $\{a_n\}$ 의 공차는 4,
 $\{b_n\}$ 의 공차는 $2q$ 이므로 $q = -2$
 $a_5 = p + 18$, $b_5 = 5 + 9q$
 $p + 18 = 5 + 9q$, $\therefore p = -31$
 $\therefore p + q = -31 - 2 = -33$

50. 수학자 드 브와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

드 브와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 브와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은?

- ① 197 ② 205 ③ 214 ④ 224 ⑤ 235

해설

이 사실을 알게 된 날을 첫째 날로 하여 드 브와브르가 깨어 있는 시간을 수열 $\{a_n\}$ 이라고 하면 a_n 은 $a_1 = 10$ (시간)이고 공차가 $-\frac{1}{4}$ (시간)인 등차수열이다.

24시간 계속 수면하게 되는 날은 깨어 있는 시간이 0시간이므로

$$a_n = 10 - \frac{1}{4}(n - 1) = 0$$

$$\therefore n = 41$$

$$\therefore \text{깨어있는 시간의 합은 } \frac{41(10 + 0)}{2} = 205(\text{시간}) \text{이다.}$$