

1. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = 3n + 6$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = 3, d = -3$

② $a = 3, d = 3$

③ $a = 6, d = 3$

④ $a = 9, d = 3$

⑤ $a = 9, d = -3$

해설

$$a_n = 3n + 6 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 6 = 9,$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 6 = 12 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = 3$$

2. 첫째항이 3, 공비가 3 인 등비수열의 일반항 a_n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a_n = 3^n$

해설

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4a_5a_6 = 125$ 일 때, a_5 의 값은?

- ① 2 ② 5 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_4a_5a_6 = ar^3 \cdot ar^4 \cdot ar^5 = a^3r^{12} = (ar^4)^3 \text{ 이므로}$$

$$(ar^4)^3 = 125 = 5^3$$

$$\therefore a_5 = ar^4 = 5$$

4. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

5. 수열 $1, a, \frac{1}{16}, b, \dots$ 가 등비수열을 이룰 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 8

④ 16

⑤ 32

해설

첫째항 = 1, 공비 = a

$$a_n = a^{n-1}$$

$$a_3 = a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \pm \frac{1}{4}$$

$$a_4 = a^3 = \pm \frac{1}{64} = b$$

$$\therefore \frac{\pm \frac{1}{4}}{\pm \frac{1}{64}} = \frac{64}{4} = 16 (\because \text{복호동순})$$

6. 양수 a, b 에 대하여 세 수 $\log 2, \log a, \log 8$ 이 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $a, b, 16$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$2 \log a = \log 2 + \log 8$$

$$a^2 = 16, \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = a \times 16 = 64, \quad \therefore b = 8$$

$$a + b = 4 + 8 = 12$$

7. 수열 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + \cdots + x^{2n-1}$ 의 합은? (단, $x \neq 1$)

① $2n$

② $\frac{x^{2n}}{x-1}$

③ $\frac{x^{2n}-1}{x-1}$

④ $\frac{x^{2n}-1}{x}$

⑤ $\frac{x^{2n}+1}{x-1}$

해설

첫째항이 1, 공비가 x , 항수가 $2n$ 인 등비수열의 합이므로

$$S = \frac{1 \cdot (x^{2n} - 1)}{x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x - 1}$$

8. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^n + (-1)^n$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ 의 값은?

① $2^{10} - 3$

② $2^{10} - 1$

③ 2^{10}

④ $2^{10} + 1$

⑤ $2^{10} + 3$

해설

$$a_n = 2^n + (-1)^n \text{에서}$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9$$

$$= (2^1 - 1) + (2^2 + 1) + \cdots + (2^9 - 1)$$

$$= (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^9) - 1$$

$$= \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} - 1 = 2^{10} - 3$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$
이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

10. 두 집합 $A = \{a, \square, b, d\}$, $B = \{b, c, \square, d\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 알파벳을 차례대로 써넣어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : c

▷ 정답 : a

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 는 $A = B$ 이다. 집합 A, B 의 모든 원소가 같아야 하므로 두 집합을 비교하면 집합 A 의 $\square = c$ 이고, 집합 B 의 $\square = a$ 이다.

11. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 자연수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{미만의 소수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $C \cup (B \cap A)$ 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 4, 8\}$ 이다.

먼저 집합 B 와 A 의 교집합을 구하면 $\{2, 3, 5, 7\}$ 이다.

$C \cup (B \cap A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ 이다.

따라서 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 = 30$ 이다.

12. 50 명의 학생 중 물감을 준비해 온 학생은 32 명, 크레파스를 준비해 온 학생은 24 명, 물감 또는 크레파스를 준비해 온 학생은 40 명이다. 물감만 준비한 학생을 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 16명

해설

전체 학생의 집합을 U , 물감을 준비해 온 학생의 집합을 A , 크레파스를 준비해 온 학생을 B 라 하자.

$$n(U) = 50, n(A) = 32, n(B) = 24, n(A \cup B) = 40 \text{ 이다.}$$

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 40 - 24 = 16 \text{ 이다.}$$

13. $x \geq a$ 가 $x^2 - 4 < 0$ 의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$ 가 $-2 < x < 2$ 의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

14. 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 가 있다. A 에서 B 로의 일대일 함수 f 중 $f(1) = 4$ 를 만족하는 f 의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f(1) = 4$ 이므로 $\{2, 3\}$ 에서
 $\{5, 6, 7\}$ 로 가는 일대일 함수의 개수와 같다.
 $\therefore 3 \times 2 = 6$

15. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = 2|x - 1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M, m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

$y = 2|x - 1| + x$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = 2|x - 1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7, $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$M + m = 7 + 1 = 8$

16. 다음의 식을 간단히 하면?

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}$$

- ① 5
- ② 10
- ③ 0
- ④ -10
- ⑤ -5

해설

준식을 유리화하면

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{121}-\sqrt{119}}{2}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{121}}{2}=\frac{11-1}{2}=5$$

17. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

18. $a_5 = 77$, $a_{10} = 42$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 77$$

$$a_{10} = a + 9d = 42$$

$$5d = -35$$

$$d = -7$$

$$a_5 = a + 4 \cdot (-7) = 77 \quad \therefore a = 105$$

$$\therefore a_n = 105 + (n - 1) \times (-7)$$

$$= -7n + 112$$

$-7n + 112 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$112 < 7n$$

$$16 < n$$

$$\therefore n = 17$$

19. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 252
인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

- ① 2^7 ② 2^8 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 28 \dots\dots \textcircled{A}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 252 \dots\dots \textcircled{B}$$

②을 변형하면

$$\frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 252,$$

$$\frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} \cdot (r^3 + 1) = 252$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$28(r^3 + 1) = 252, \quad r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$$

$$r \text{는 실수이므로 } r = 2 \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \text{을 } \textcircled{C} \text{에 대입하면 } 7a = 28 \quad \therefore a = 4$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$$

20. 첫째항이 1 이고, 공비가 4 인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000 보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000, 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

21. 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 하면
 $S_n = n^2 + kn, \log_3(T_n - 1) = n$ 이 성립한다. 두 수열의 제3항이 서로 같을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$S_n = n^2 + kn$ 이므로
 $a_3 = S_3 - S_2$
 $(3^2 + 3k) - (2^2 + 2k) = k + 5$
 $\log_3(T_n - 1) = n$ 에서 $T_n = 3^n + 1$ 이므로
 $b_3 = T_3 - T_2 = 3^3 + 1 - (3^2 + 1)$
 $= 28 - 10 = 18$
이때, $a_3 = b_3$ 이므로 $k + 5 = 18 \quad \therefore k = 13$

22. 매출액이 매년 일정한 비율로 증가하는 기업이 있다. 지난 10년간 매출액의 증가율이 69%일 때, 처음 5년간 매출액의 증가율은?

- ① 13% ② 15% ③ 20% ④ 24% ⑤ 30%

해설

매년 매출액의 증가비율을 a 라 하자

$(1 + a)^{10} = 1.69$ 일 때

$$(1 + a)^5 = \sqrt{1.69} = \sqrt{1.3^2} \\ = 1.3 \text{이므로}$$

1.3배로 증가하였다.

따라서 증가율은 30%

23. 가로 길이, 세로 길이, 높이가 각각 a, b, c 인 직육면체에 대하여 a, b, c 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겉넓이가 180일 때, 이 직육면체의 부피는?

- ① 174 ② 188 ③ 202 ④ 216 ⑤ 230

해설

등비수열 a, b, c 의 공비를 r 이라 하면 가로 길이, 세로 길이, 높이는 각각 a, ar, ar^2 이다.
모서리의 길이의 총합은 $4(a + ar + ar^2) = 60$ 에서
 $a(1 + r + r^2) = 15 \cdots \textcircled{1}$
또, 겉넓이는 $2(a \cdot ar + a \cdot ar^2 + ar \cdot ar^2) = 180$ 에서
 $a^2r(1 + r + r^2) = 90 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 에서 $ar = 6$
따라서 직육면체의 부피 V 는
 $V = a \cdot ar \cdot ar^2 = a^3r^3 = (ar)^3 = 6^3 = 216$

24. $\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}$, $\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 + 2\sqrt{12}, \frac{1}{x} = \sqrt{3} + 2, x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 = 7 - 2\sqrt{12}, \frac{1}{y} = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, xy = 1$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 64 - 12 = 52$$

25. $f(x) = |x - 2|$ 일 때, $(f \circ f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합을 구하면?

① 8

② 6

③ 4

④ 2

⑤ 0

해설

$f(2) = 0$ 이므로

$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = 0$ 에서

$(f \circ f)(x) = 2$

또, $f(4) = 2$, $f(0) = 2$ 이므로

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 2$ 에서

$f(x) = 4$ 또는 $f(x) = 0$

(i) $f(x) = |x - 2| = 4$ 일 때, $x = 6$ 또는 $x = -2$

(ii) $f(x) = |x - 2| = 0$ 일 때, $x = 2$

따라서 모든 실근의 합은 $(-2) + 6 + 2 = 6$