1. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4, \sum_{i=1}^{100} y_i = 6$일때, $\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\sum_{k=1}^{100}(3x_k - 2y_k) = 3\sum_{k=1}^{100} x_k - 2\sum_{k=1}^{100} y_k$
$= 3\sum_{i=1}^{100} x_i - 2\sum_{i=1}^{100} y_i = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$

2. $4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3 = \sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^{3} k^3$

$= \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2$

$= 3025 - 36 = 2989$

3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$ 의 값은?

① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^3 - \sum_{k=1}^{10}(a_k-1)^3$
$= \sum_{k=1}^{10}(a_k^3+3a_k^2+3a_k+1) - \sum_{k=1}^{10}(a_k^3-3a_k^2+3a_k-1)$
$= \sum_{k=1}^{10}(6a_k^2+2) = 6\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2$
$= 6\times 20 + 2\times 10 = 140$

4. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\sum_{k=1}^{10}(a_k + 2b_k - 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2\sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$

$= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3$

5. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$
$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$
$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

6. $\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$ 의 값은?

① 385 ② 550 ③ 1100 ④ 1150 ⑤ 1200

해설

$\sum_{j=1}^{10}\left\{\sum_{i=1}^{j}(3+i)\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left\{3j+\dfrac{j(j+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{j=1}^{10}\left(\dfrac{j^2+7i}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{10}j^2+7\sum_{j=1}^{10}j\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+7\times\dfrac{10\cdot 11}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}(385+385)=385$

7. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400　　② 425　　③ 450　　④ 475　　⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$

$\therefore$ (준 식) $=\sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150$

$=5\times55+150=425$

8. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\right\}$의 값은?

① 250　② 300　③ 450　④ 550　⑤ 650

해설

$\sum_{n=1}^{10} \left\{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\right\}$
$= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n)$
$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 550$

9. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^{j} (3+i) \right\}$ 의 값은?

① 385　　② 550　　③ 1100　　④ 1150　　⑤ 1200

해설

$$\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^{j} (3+i) \right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2+7j}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} (385 + 385)$$
$$= 385$$

10. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$
④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로
$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

11. $\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right) = 1008$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 12k\right)$

$= \sum_{l=1}^{n} 12 \cdot \left\{\frac{l(l+1)}{2}\right\} = 6\left(\sum_{l=1}^{n} l^2 + \sum_{l=1}^{n} l\right)$

$= 6\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2)$

즉, $2n(n+1)(n+2) = 1008$ 이므로

$n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$

$\therefore\ n = 7$

12. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

① 2200 ② 2640 ③ 2860 ④ 3020 ⑤ 3080

해설

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 = \sum_{k=1}^{20} k(k+1)$
$= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \dfrac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \dfrac{20 \cdot 21}{2}$
$= 2870 + 210 = 3080$

13. 다음을 계산하여라.

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$
$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$
$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$
$= 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k$
$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$
$= 1155 - 110$
$= 1045$

14. 수열 $1 \cdot 2 \cdot 4,\ 2 \cdot 4 \cdot 8,\ 3 \cdot 6 \cdot 12,\ 4 \cdot 8 \cdot 16, \cdots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400 ② 1100 ③ 12100

④ 24200 ⑤ 48400

해설

$a_k = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 11^2 = 24200$

15. 수열 $1 \cdot 1,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 5,\ 4 \cdot 7, \cdots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)$

$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)\left\{2(2n+1)-3\right\}$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

16. 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 두 허근을 α, β라고 할 때, $\sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k)$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$에서 두 허근 α, β는
$x^2 + x + 1 = 0$의 근이므로
$\alpha + \beta = -1,\ \alpha\beta = 1,\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 2$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{3}(\alpha^k + \beta^k) = (\alpha+\beta) + (\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^3+\beta^3)$
$= (-1) + (-1) + 2 = 0$

17. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 할 때, $\frac{S}{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로
1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S라 하면
$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$
$2S = \left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 2640$
$\therefore S = 1320$
$\therefore \frac{S}{10} = 132$

18. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 - n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)a_k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
$= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\}$
$= 4n - 3(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
$n = 1$일 때, $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$
따라서 $a_n = 4n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로
$\sum_{k=1}^{5}(2k+2)a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k+1)(4k-3)$
$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2 - 2k - 3)$
$= 8 \cdot \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5$
$= 440 - 30 - 15 = 395$

19. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2^n$을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$의 값은?

① 20　② 22　③ 25　④ 27　⑤ 30

해설

$n \geq 2$일 때,
$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$
$\therefore\ a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$
$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$
$\therefore\ a_{10} = 2^{5-1} = 16$
$\therefore\ a_9 + a_{10} = 25$

20. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① n^2+1 ② n^2+3n ③ $2n^2$

④ $2n^2+n$ ⑤ $3n^2-1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n$

$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

21. $\sum_{k=1}^{n} = n^2 + 1$ 일 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a_5 = 9$

㉡ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = 2n^2 + n$

㉢ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = 2n^2 - n + 1$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$ 이라 하면
$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 1) - (4^2 + 1) = 9$(참)
㉡ $S_n = n^2 + 1$ 이므로
$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\}$
$= 2n - 1 (n \geq 2)$
$\therefore\ a_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1 (n \geq 1)$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2n^2 + n$(참)
㉢ $a_n = 2n - 1 (n \geq 2)$ 이고 $a_1 = S_1 = 2$ 이다. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} =$
$2 + \sum_{k=2}^{n}\{2(2k-1) - 1\} = 2 + \sum_{k=2}^{n}(4k-3)$
$= 2 + \sum_{k=1}^{n}(4k-3) - 1 = 2 + 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 3 - 1$
$= 1 + 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n + 1$(참)
따라서, 보기 중에서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

22. $\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$을 n에 관한 식으로 나타내면?

① $60(2^n-1)$　② $35(2^n-1)$　③ $20(2^n+1)$
④ $20(2^n-1)$　⑤ $16(2^n-1)$

해설

$\sum_{k=1}^{10}\left\{\sum_{m=1}^{n}(k-2)\cdot 2^{m-1}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left\{\dfrac{(k-2)(2^n-1)}{2-1}\right\}$

$=(2^n-1)\sum_{k=1}^{10}(k-2)$

$=(2^n-1)\left(\dfrac{10\times 11}{2}-20\right)=35(2^n-1)$

23. $\sum_{k=1}^{5} a_k = 20$, $\sum_{k=1}^{5} b_k = 5$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k - 1)$의 값은?

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

해설

(주어진 식)
$= 2\sum_{k=1}^{5} a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k - \sum_{k=1}^{5} 1$
$= 2 \cdot 20 - 5 - 5$
$= 30$

24. 수열$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$S = 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + 13\cdot 2^6 + 15\cdot 2^7 \cdots\cdots$ ㉠

$2S = 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + 13\cdot 2^7 + 15\cdot 2^8 \cdots\cdots$ ㉡

이므로 ㉠ - ㉡을 하면

$$-S = 2\cdot\frac{(2^8-1)}{2-1} - 1 - 15\cdot 2^8$$

$$S = -2\cdot 2^8 + 2 + 1 + 15\cdot 2^8$$

$$= 13\cdot 2^8 + 3 = 3331$$

25. 등식 $(1^3-2)+(2^3-4)+(3^3-6)+\cdots+(m^3-2m)=35^2-1$ 이 성립하도록 하는 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(1^3-2)+(2^3-4)+(3^3-6)+\cdots+(m^3-2m)$
$=\sum_{k=1}^{m}(k^3-2k)=\sum_{k=1}^{m}k^3-2\sum_{k=1}^{m}k$

이때, $\sum_{k=1}^{m}k^3=\left\{\dfrac{m(m+1)}{2}\right\}^2=\left(\sum_{k=1}^{m}k\right)^2$ 이므로

$\sum_{k=1}^{m}k=x$ 로 놓으면 주어진 등식은
$x^2-2x=35^2-1,\ x^2-2x=36\cdot 34$
$x^2-2x-36\cdot 34=0$
$\therefore x=36(\because x>0)$

따라서 $\sum_{k=1}^{m}k=\dfrac{m(m+1)}{2}=36$ 이므로
$m(m+1)=72=8\cdot 9$
따라서 $m=8$