

1. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 4, \sum_{i=1}^{100} y_i = 6$ 일때, $\sum_{k=1}^{100} (3x_k - 2y_k)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} (3x_k - 2y_k) &= 3 \sum_{k=1}^{100} x_k - 2 \sum_{k=1}^{100} y_k \\ &= 3 \sum_{i=1}^{100} x_i - 2 \sum_{i=1}^{100} y_i = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0\end{aligned}$$

2. $4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2989

해설

$$\begin{aligned} 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots + 10^3 &= \sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^3 k^3 \\ &= \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2 \\ &= 3025 - 36 = 2989 \end{aligned}$$

3. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3$ 의 값은?

① 110

② 120

③ 122

④ 132

⑤ 140

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 + 3a_k^2 + 3a_k + 1) - \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 - 3a_k^2 + 3a_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6a_k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140 \end{aligned}$$

4. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 1) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 3 + 2 \times 5 - 10 = 3\end{aligned}$$

5. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{10} = 30$ 을 만족할 때 $\sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$ 의 값은?

① 26

② 27

③ 28

④ 29

⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1} \\ &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) - \\ & \quad (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) \\ &= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29 \end{aligned}$$

6. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

① 385

② 550

③ 1100

④ 1150

⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) = 385 \end{aligned}$$

7. $\sum_{l=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^5 (k+l) \}$ 의 값은?

① 400

② 425

③ 450

④ 475

⑤ 500

해설

$$\sum_{l=1}^5 (k+l) = \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 l = \sum_{k=1}^5 k + 5l$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= \sum_{l=1}^{10} (5l + 15) = 5 \sum_{l=1}^{10} l + 150 \\ &= 5 \times 55 + 150 = 425 \end{aligned}$$

8. $\sum_{k=1}^n a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^n b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \{ \sum_{k=1}^n (2a_k - 3b_k + 5) \}$ 의 값은?

① 250

② 300

③ 450

④ 550

⑤ 650

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{10} \left\{ 2 \sum_{k=1}^n a_k - 3 \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n 5 \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{10} (2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} (20n - 15n + 5n) \\ &= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 550 \end{aligned}$$

9. $\sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\}$ 의 값은?

① 385

② 550

③ 1100

④ 1150

⑤ 1200

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{i=1}^j (3+i) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 3j + \frac{j(j+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{j^2 + 7j}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{10} j^2 + 7 \cdot \sum_{j=1}^{10} j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{6} + 7 \times \frac{10 \cdot 11}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (385 + 385) \\ &= 385 \end{aligned}$$

10. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$$3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$$

① $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$

② $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^k$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k$

⑤ $\sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k+1}$

해설

제 k 항은 $3 \cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n 이므로

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^n 3 \cdot 2^{k-1}$$

11. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l 12k) = 1008$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l 12k) \\ &= \sum_{l=1}^n 12 \cdot \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = 6 \left(\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l \right) \\ &= 6 \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n(n+1)(2n+4) = 2n(n+1)(n+2) \\ &\text{즉, } 2n(n+1)(n+2) = 1008 \text{ 이므로} \\ &n(n+1)(2n+4) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504 \\ &\therefore n = 7 \end{aligned}$$

12. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21$ 의 값은?

① 2200

② 2640

③ 2860

④ 3020

⑤ 3080

해설

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 20 \cdot 21 &= \sum_{k=1}^{20} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} + \frac{20 \cdot 21}{2} \\ &= 2870 + 210 = 3080 \end{aligned}$$

13. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$$

$$= 3 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$

$$= 1155 - 110$$

$$= 1045$$

14. 수열 $1 \cdot 2 \cdot 4, 2 \cdot 4 \cdot 8, 3 \cdot 6 \cdot 12, 4 \cdot 8 \cdot 16, \dots$ 의 제 10항까지의 합은?

① 400

② 1100

③ 12100

④ 24200

⑤ 48400

해설

$a_k = k \cdot 2k \cdot 4k = 8k^3$ 이므로

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} 8k^3 = 8 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 = 2 \cdot 10^2 \cdot 11^2 = 24200$$

15. 수열 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은?

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-2)$

③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(2k-1) = 2k^2 - k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1) \{2(2n+1) - 3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

16. 방정식 $x^3 - 1 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라고 할 때, $\sum_{k=1}^3 (\alpha^k + \beta^k)$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서 두 허근 α, β 는
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이므로

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1, \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^3 (\alpha^k + \beta^k) &= (\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3) \\ &= (-1) + (-1) + 2 = 0\end{aligned}$$

17. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 이므로

1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2 = (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) + 2S$$

$$2S = \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 2640$$

$$\therefore S = 1320$$

$$\therefore \frac{S}{10} = 132$$

18. $\sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 - n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 395

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 (n=2, 3, 4, \dots) \\ n=1 \text{ 일 때, } a_1 &= 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 \\ \text{따라서 } a_n &= 4n - 3 (n=1, 2, 3, \dots) \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^5 (2k+1)a_k &= \sum_{k=1}^5 (2k+1)(4k-3) \\ &= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k - 3) \\ &= 8 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} - 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} - 3 \cdot 5 \\ &= 440 - 30 - 15 = 395 \end{aligned}$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = n^2$, $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2^n$ 을 만족할 때, $a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 20

② 22

③ 25

④ 27

⑤ 30

해설

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_{2n-1} = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$$

$$\therefore a_9 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = 2^{5-1} = 16$$

$$\therefore a_9 + a_{10} = 25$$

20. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^n a_{2k-1}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$

② $n^2 + 3n$

③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$

⑤ $3n^2 - 1$

해설

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{ 이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 2$$

이것은 ㉞에 $n = 1$ 을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 2n$$

$$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^n (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$

21. $\sum_{k=1}^n = n^2 + 1$ 일 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a_5 = 9$

㉡ $\sum_{k=1}^n a_{2k} = 2n^2 + n$

㉢ $\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = 2n^2 - n + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sum_{k=1}^n a_k = S_n$ 이라 하면

$$a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 1) - (4^2 + 1) = 9 \text{ (참)}$$

㉡ $S_n = n^2 + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + 1 - \{(n-1)^2 + 1\} \\ &= 2n - 1 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{2n} = 2(2n) - 1 = 4n - 1 \quad (n \geq 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_{2k} = \sum_{k=1}^n (4k-1) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2n^2 + n \text{ (참)}$$

$$\begin{aligned} \text{㉢ } a_n &= 2n - 1 \quad (n \geq 2) \text{ 이고 } a_1 = S_1 = 2 \text{ 이다. } \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \{2(2k-1) - 1\} = 2 + \sum_{k=2}^n (4k-3) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^n (4k-3) - 1 = 2 + 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 3 - 1 \end{aligned}$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 2n^2 - n + 1 \text{ (참)}$$

따라서, 보기 중에서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

22. $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\}$ 을 n 에 관한 식으로 나타내면?

① $60(2^n - 1)$

② $35(2^n - 1)$

③ $20(2^n + 1)$

④ $20(2^n - 1)$

⑤ $16(2^n - 1)$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{(k-2)(2^n - 1)}{2 - 1} \right\} \\ &= (2^n - 1) \sum_{k=1}^{10} (k-2) \\ &= (2^n - 1) \left(\frac{10 \times 11}{2} - 20 \right) = 35(2^n - 1) \end{aligned}$$

23. $\sum_{k=1}^5 a_k = 20$, $\sum_{k=1}^5 b_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (2a_k - b_k - 1)$ 의 값은?

① 15

② 20

③ 25

④ 30

⑤ 35

해설

(주어진 식)

$$= 2 \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k - \sum_{k=1}^5 1$$

$$= 2 \cdot 20 - 5 - 5$$

$$= 30$$

24. 수열 $\sum_{k=1}^8 (2k-1) \cdot 2^{k-1}$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3331

해설

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + 13 \cdot 2^6 + 15 \cdot 2^7 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2S = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \cdots + 13 \cdot 2^7 + 15 \cdot 2^8 \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$-S = 2 \cdot \frac{(2^8 - 1)}{2 - 1} - 1 - 15 \cdot 2^8$$

$$\begin{aligned} S &= -2 \cdot 2^8 + 2 + 1 + 15 \cdot 2^8 \\ &= 13 \cdot 2^8 + 3 = 3331 \end{aligned}$$

25. 등식 $(1^3 - 2) + (2^3 - 4) + (3^3 - 6) + \cdots + (m^3 - 2m) = 35^2 - 1$ 이 성립하도록 하는 자연수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$(1^3 - 2) + (2^3 - 4) + (3^3 - 6) + \cdots + (m^3 - 2m) \\ = \sum_{k=1}^m (k^3 - 2k) = \sum_{k=1}^m k^3 - 2 \sum_{k=1}^m k$$

$$\text{이때, } \sum_{k=1}^m k^3 = \left\{ \frac{m(m+1)}{2} \right\}^2 = (\sum_{k=1}^m k)^2 \text{ 이므로}$$

$\sum_{k=1}^m k = x$ 로 놓으면 주어진 등식은

$$x^2 - 2x = 35^2 - 1, \quad x^2 - 2x = 36 \cdot 34$$

$$x^2 - 2x - 36 \cdot 34 = 0$$

$$\therefore x = 36 (\because x > 0)$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} = 36 \text{ 이므로}$$

$$m(m+1) = 72 = 8 \cdot 9$$

$$\text{따라서 } m = 8$$