1. 24 에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 2

② 6

③ 9

④ 12

⑤ 18

해설

$$24 \times a = b^2$$

$$2^3 \times 3 \times a = b^2$$

$$a = 2 \times 3 = 6$$

$$2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = b^2$$

$$b = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\therefore a + b = 18$$

2. $2^4 \times 3^2 \times 5$ 의 약수 중에서 두 번째로 큰 수는?

① $2^3 \times 3^2 \times 5$

② $2^3 \times 3^2$

③ $2^4 \times 3^2 \times 5$

④ $2^4 \times 3 \times 5$

⑤ $2^4 \times 5$

해설

제일 큰 약수는 자기 자신인 $2^4 \times 3^2 \times 5$ 이고, 두 번째로 큰 수는 가장 작은 소인수인 2가 한번 덜 곱해진 것이므로, $2^{4-1} \times 3^2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이다.

3. 다음 중 약수의 개수가 5 인 자연수 중 가장 작은 자연수는?

① 12

② 14

③ 16

④ 18

⑤ 20

해설

약수의 개수는 소인수들의 지수에 1 을 더하여 곱한 값이므로
약수의 개수가 5 인 경우는

지수가 4 인 소인수가 하나인 경우 밖에 없다.

따라서 이 경우 이 자연수가 가장 작기 위해서는

소인수가 가장 작아야하므로

소인수는 가장 작은 소수인 2 이고

따라서 약수의 개수가 5 인 가장 작은 자연수는 $2^4 = 16$ 이다.

4. 자연수 135의 약수의 개수와 $3 \times 5^n \times a^m$ 의 약수의 개수가 같을 때, $n + m$ 의 값은? (단, m, n 은 자연수이고, $a \neq 3, 5$ 인 소수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$135 = 3^3 \times 5$$

$$(\text{약수의 개수}) = 4 \times 2 = 8(\text{개})$$

$$(1 + 1) \times (n + 1) \times (m + 1) = 8, n = 1, m = 1$$

$$\text{그러므로 } n + m = 1 + 1 = 2$$

5. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5개

② 6개

③ 7개

④ 8개

⑤ 9개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.

따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면

$13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로

200 이하인 소수의 완전제곱수는

$2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

6. 1 에서 100 까지의 자연수 중에서 6 과 서로소인 자연수의 개수는?

① 17 개

② 33 개

③ 50 개

④ 67 개

⑤ 84 개

해설

$6 = 2 \times 3$ 이므로 6 과 서로소인 수는 2 의 배수도 3 의 배수도 아닌 수이다.

100 이하의 자연수 중 2 의 배수는 50 개, 3 의 배수는 33 개, 6 의 배수는 16 개이므로

2 또는 3 의 배수의 개수는 $50 + 33 - 16 = 67$ (개)

따라서 6 과 서로소인 수는 $100 - 67 = 33$ (개)이다.

7. 다음 중 옳은 것은?

- ① 소수는 모두 홀수이다.
- ② 약수가 1 개뿐인 수를 소수라 한다.
- ③ 합성수의 약수는 3 개 이상이다.
- ④ 1 은 합성수이다.
- ⑤ 두 수가 서로소이면 두 수 중 한 수는 반드시 소수이다.

해설

- ① 2 는 유일한 짝수이다.
- ② 약수가 1 과 자기 자신 즉 2 개인 수를 소수라 한다.
- ④ 1 은 소수도 합성수도 아니다.
- ⑤ 8 과 9 는 서로소 이지만 두 수 모두 합성수이다.

8. $3^2 \times 5^2 \times 7^3$, $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 의 최대공약수는?

① $2^2 \times 3^2$

② 5×7^2

③ $2^3 \times 3^2 \times 7$

④ $2^2 \times 3 \times 7^2$

⑤ $3^2 \times 5^2$

해설

공통인 소인수를 모두 곱하는데 지수가 같으면 그대로, 다르면 작은 쪽을 택하여 곱한다.

$\therefore 3^2 \times 5^2 \times 7^3$, $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ 의 최대공약수: $3^2 \times 5^2$

9. 두 수 $2^4 \times 5^4$, $2^3 \times 5^m \times 7$ 의 최대공약수가 $2^3 \times 5^3$ 일 때, m 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

최대공약수가 $2^3 \times 5^3$ 이고

$2^4 \times 5^4$ 에서 5 의 지수가 4 이므로

$2^3 \times 5^m \times 7$ 에서 5 의 지수가 3 이어야 한다.

따라서 $m = 3$

10. 다음 보기 중 세 자연수 $2^3 \times 3^2 \times 5^3$, $2^2 \times 3^3 \times 7^2$, $2^4 \times 3^2 \times 11$ 의 공약수는 몇 개인가?

보기

$$2 \times 3, \quad 2 \times 3^2 \times 5, \quad 2^2 \times 3 \times 5$$
$$2^2 \times 3^2, \quad 2^2 \times 3 \times 7, \quad 2^3 \times 3^2$$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

공약수는 최대공약수의 약수,
최대공약수를 구하면 $2^2 \times 3^2$,
따라서 보기 중에 주어진 세 수의 공약수는 2×3 , $2^2 \times 3^2$ 이다.

11. 남자 70 명, 여자 56 명인 어떤 모임에서 조 대항 장기자랑을 하려고 한다. 조별 인원수가 같고, 각 조에 속하는 남녀의 비가 같도록 최대한 많은 수의 조를 짤 때, 각 조별 남, 녀의 수는?

① 남 : 7 명, 여 : 6 명

② 남 : 6 명, 여 : 5 명

③ 남 : 6 명, 여 : 4 명

④ 남 : 5 명, 여 : 5 명

⑤ 남 : 5 명, 여 : 4 명

해설

조의 개수는 70 과 56 의 최대공약수이다.

$$70 = 2 \times 5 \times 7, 56 = 2^3 \times 7$$

따라서 조의 개수는 $2 \times 7 = 14$ (개)

조별 남학생의 수는 $70 \div 14 = 5$ (명), 여학생의 수는 $56 \div 14 = 4$ (명)이다.

12. 사생대회 상품으로 학용품을 준비했다. 공책 45 권, 샤프 38 개, 지우개 32 개를 될 수 있는 대로 많은 학생들에게 똑같이 나누어 주었더니 공책 3 권, 샤프 2 개, 지우개 2 개가 남았다. 몇 명의 학생에게 나누어 주었는가?

① 4 명

② 6 명

③ 8 명

④ 10 명

⑤ 11 명

해설

학생 수는 $45 - 3, 38 - 2, 32 - 2,$
즉 $42, 36, 30$ 의 최대공약수이므로 6 명

13. 16, 42, 54 의 최소공배수는?

① 2×3

② $2^3 \times 3$

③ $2 \times 3 \times 7$

④ $2^3 \times 3^3$

⑤ $2^4 \times 3^3 \times 7$

해설

$16 = 2^4$, $42 = 2 \times 3 \times 7$, $54 = 2 \times 3^3$ 이므로
최소공배수는 $2^4 \times 3^3 \times 7$ 이다.

14. 두 자연수 $2^a \times 3 \times 5$ 와 $2^2 \times 3^b \times c$ 의 최소공배수가 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

최소공배수가 $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로

$a = 3, b = 2, c = 7$ 이다.

$\therefore a + b + c = 12$

15. 두 자연수의 최소공배수가 16 일 때, 두 자연수의 공배수를 바르게 나열한 것은?

① 1, 2, 4, 8, 16

② 4, 16, 64, ...

③ 16, 32, 48

④ 4, 8, 16, 32, ...

⑤ 16, 32, 48, 64, ...

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로, 두 자연수의 공배수는 16의 배수이다.

16. 두 자연수 $15 \times x$, $21 \times x$ 의 최소공배수가 210 일 때, x 의 값으로 옳은 것은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$15 \times x = 3 \times 5 \times x$, $21 \times x = 3 \times 7 \times x$ 의 최소공배수는 $3 \times 5 \times 7 \times x = 210$

따라서 $x = 2$ 이다.

17. 운동장에서 진수는 달리기를 하고 성찬이는 자전거를 타고 있다. 한 바퀴 도는데 진수는 1분 30초 걸리고 성찬이는 54초가 걸린다. 출발점에서 두 사람이 오전 10시에 동시에 출발했을 때, 그 다음 출발점에서 만나는 시각은?

- ① 10시 2분 10초 ② 10시 2분 50초 ③ 10시 3분 20초
④ 10시 3분 40초 ⑤ 10시 4분 30초

해설

90, 54의 최소공배수는 270이므로 진수와 성찬이는 4분 30초마다 출발점에서 만난다.

따라서 10시에 동시에 출발했으므로 다음 동시에 출발하는 시각은 10시 4분 30초이다.

18. 가로 6cm, 세로 9cm 인 직사각형을 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 가장 작은 정사각형을 만들려고 한다. 이 때, 정사각형의 한 변의 길이는?

① 6cm

② 9cm

③ 15cm

④ 18cm

⑤ 36cm

해설

6 과 9 의 최소공배수가 구하는 정사각형의 한 변이므로 18cm 가 된다.

19. 14 와 20 의 어느 것으로 나누어도 나머지가 7 인 수 중에서 가장 작은 세 자리의 자연수는?

① 145

② 146

③ 147

④ 148

⑤ 149

해설

14 와 20 의 어느 것으로 나누어도 나머지가 7 인 수를 k 라고 하면, $(k - 7)$ 은 14 와 20 의 공배수가 됩니다.

따라서 14 와 20 의 공배수 중에서 세 자리의 자연수를 구하고, 거기에 7 을 더하면 됩니다.

그런데, 14 와 20 의 최소공배수는 140 이고, 이것은 세 자리 수 중 가장 작은 수이므로, 여기에 7 을 더하여 $140 + 7 = 147$ 을 얻게 됩니다.

20. 두 수 $2 \times a \times 7^2$ 과 $b \times 5 \times 7 \times 13$ 의 최대공약수가 $2 \times 5 \times 7$ 이고, 최소공배수가 $2^3 \times 5 \times 7^2 \times 13$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 13

⑤ 14

해설

최대공약수가 $2 \times 5 \times 7$ 이므로 $a = 5$,

최소공배수가 $2^3 \times 5 \times 7^2 \times 13$ 이므로 $b = 2^3 = 8$

따라서 $a + b = 13$ 이다.

21. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

- ㉠ 9 는 35 의 약수이다.
- ㉡ 1 은 모든 자연수의 배수이다.
- ㉢ 6 은 자기 자신이 약수인 동시에 배수이다.
- ㉣ 392 는 4 의 배수이다.
- ㉤ 36 의 약수의 개수는 8 개이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉢, ㉣

해설

- ㉢. 모든 자연수는 자기 자신이 약수인 동시에 배수이다.
- ㉣. 392 는 4 의 배수이다.

22. $3^6 = 729$ 를 이용하여 $729 - 3^5 - 3^a = 243$ 을 만족하는 자연수 a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$3^6 = 729$ 이고 $3^5 = 243$ 이다.

따라서 $729 - 243 - 3^a = 243$, $3^a = 243$ 이므로 $a = 5$ 이다.

23. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 10 이하의 소수는 모두 4 개이다.
- ② 17 은 소수이다.
- ③ 1 을 제외한 모든 홀수는 소수이다.
- ④ 2 는 소수이다.
- ⑤ 소수의 약수는 2 개이다.

해설

소수는 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다. 따라서 9 는 홀수이지만 소수가 아니다.

24. 252를 소인수분해한 후, 소인수의 합을 바르게 구한 것은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 15

해설

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7, \text{ 소인수 : } 2, 3, 7$$

$$2 + 3 + 7 = 12$$

25. 75 에 가능한 한 작은 자연수 x 로 나누어서 어떤 자연수 y 의 제곱이 되게 하려고 한다. y 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 9

⑤ 15

해설

75 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 75} \\ \underline{30} \\ 45 \\ \underline{45} \\ 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 25} \\ \underline{10} \\ 15 \\ \underline{15} \\ 0 \end{array}$$

5

75 = 3×5^2 이므로 $\frac{3 \times 5^2}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 작은 자연수는 3이다. 따라서 $y = 5$ 이다.