

1. $\sum_{k=1}^5 a_k = 5$, $\sum_{k=1}^5 b_k = 7$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (3a_k + 2b_k)$ 의 값은?

① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 29

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (3a_k + 2b_k) &= \sum_{k=1}^5 3a_k + \sum_{k=1}^5 2b_k \\ &= 3 \sum_{k=1}^5 a_k + 2 \sum_{k=1}^5 b_k \\ &= 3 \times 5 + 2 \times 7 = 15 + 14 = 29\end{aligned}$$

2. 다음 등식이 성립하도록 하는 c 의 값을 구하여라.

$$\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 = \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 360

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{100} (k-2)^2 &= \sum_{k=11}^{100} (k^2 - 4k + 4) \\ &= \sum_{k=11}^{100} k^2 - 4 \sum_{k=11}^{100} k + \sum_{k=11}^{100} 4 \\ \therefore c &= \sum_{k=11}^{100} 4 = 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 90 = 360\end{aligned}$$

3. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 56$ 을 만족시키는 n 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} (\sum_{l=1}^n l^2 + \sum_{l=1}^n l) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 56 \text{ 이므로}$$

$$n(n+1)(n+2) = 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\therefore n = 6$$

4. $1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$ 의 값은?

① 640

② 660

③ 680

④ 700

⑤ 720

해설

$n \leq 15$ 일 때, $a_n = n(16 - n) = -n^2 + 16n$

$\therefore 1 \cdot 15 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + \cdots + 15 \cdot 1$

$$= \sum_{k=1}^{15} (-k^2 + 16k) = -\sum_{k=1}^{15} k^2 + 16 \sum_{k=1}^{15} k$$

$$= -\frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} + 16 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} = 680$$

5. n 개의 수 $1 \cdot 2n, 2 \cdot (2n-1), 3 \cdot (2n-2), \dots, n(n+1)$ 의 합은?

① $\frac{n^2(n+1)}{2}$

③ $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

⑤ $n(n+1)(2n+1)$

② $\frac{n(n+1)^2}{2}$

④ $\frac{(n+1)(2n+1)}{3}$

해설

주어진 수열의 제 k 항은

$$k \{2n - (k-1)\} = k(2n - k + 1)$$

$$= -k^2 + (2n+1)k$$

이므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^n k \{2n - (k-1)\}$$

$$= -\sum_{k=1}^n k^2 + (2n+1) \sum_{k=1}^n k$$

$$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

6. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $A = \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$, $B = \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 라 할 때, 다음 중 이 수열의 공비 r 을 나타내는 것은?(단, $a_1 \neq 0$, $r > 0$)

- ① $\frac{B}{A}$ ② $\frac{A}{B}$ ③ $\sqrt{\frac{B}{A}}$ ④ $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ⑤ $\sqrt{AB}$

해설

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} \\ &= a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} \\ &= ar + ar^3 + ar^5 + \cdots + ar^{19} \\ &= r \{a + ar^2 + ar^4 + \cdots + ar^{18}\} = r \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } r = \frac{B}{A}$$

7. $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\}$ 을 n 에 관한 식으로 나타내면?

① $60(2^n - 1)$

② $35(2^n - 1)$

③ $20(2^n + 1)$

④ $20(2^n - 1)$

⑤ $16(2^n - 1)$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n (k-2) \cdot 2^{m-1} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ \frac{(k-2)(2^n - 1)}{2 - 1} \right\} \\ &= (2^n - 1) \sum_{k=1}^{10} (k-2) \\ &= (2^n - 1) \left(\frac{10 \times 11}{2} - 20 \right) = 35(2^n - 1) \end{aligned}$$

8. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 를 만족시킬 때, b_{27} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d(d \neq 0)$ 라 하면

$$a_n = (n-1)d$$

$$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{에서 } nd \cdot b_n = \sum_{k=1}^n (k-1)d$$

$$nd \cdot b_n = d \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - n \right\}, \quad b_n = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$$

$$b_{27} = \frac{27-1}{2} = 13$$