

1. 집합 $A = \{\emptyset, a, \{a, b\}\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

집합 A 에서 $\{a, b\}$ 은 하나의 원소이므로 $n(A) = 3$ 이다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 에 대하여 $\{1, 2\} \subset X$ 이고 $X \subset A$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 없는 것은?

① $\{1, 2\}$

② $\{1, 2, 4\}$

③ $\{2, 4, 8\}$

④ $\{1, 2, 4, 8\}$

⑤ $\{1, 2, 4, 8, 16\}$

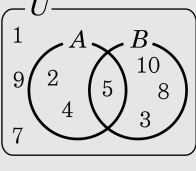
해설

$\{1, 2\} \subset X$ 이고 $X \subset A$ 이므로 A 의 부분집합 중 1, 2를 항상 포함하여야 한다.
그러므로 1을 포함하지 않은 $\{2, 4, 8\}$ 이 집합 X 가 될 수 없다.

3. $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여
 $A - B = \{2, 4\}, A \cap B = \{5\}, A^c \cap B^c = \{1, 6, 7, 9\}$ 일 때, 집합 B 는?
- ① $\{3, 5\}$ ② $\{5, 7\}$ ③ $\{3, 5, 8\}$
④ $\{3, 5, 10\}$ ⑤ $\{3, 5, 8, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c = \{1, 6, 7, 9\}$ 이므로



따라서 $B = \{3, 5, 8, 10\}$ 이다.

4. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A = \{3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 3\}$ 일 때, $B^c - A^c$ 은?

① $\{3\}$

② $\{3, 5\}$

③ $\{4\}$

④ $\{4, 5\}$

⑤ $\{4, 5, 6\}$

해설

$B^c - A^c = A - B = \{3, 4, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}$ 이다.

5. 두 집합 $n(A) = 15, n(B) = 11, n(A \cap B) = 6$ 일 때, $n(A - B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 15 - 6 = 9$$

6. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $2^{4n} < 3^{3n}$ ② $2^{4n} > 3^{3n}$ ③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$
④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$ ⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

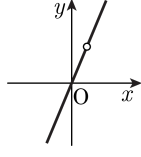
해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

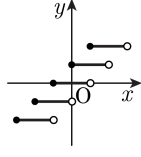
$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

7. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x 에서 y 로의 함수인 것은?

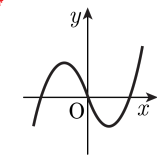
①



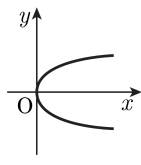
②



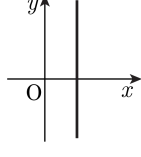
③



④



⑤



해설

①은 대응되지 못하는 x 의 값이 존재하고
②, ④, ⑤는 x 의 한 값에
 y 의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

8. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

9. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x 의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

- ① $-2 \leq x \leq 1$ ② $0 \leq x \leq 1$ ③ $1 < x < 2$
④ $-1 \leq x \leq 2$ ⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x+1 \geq 0 \quad \therefore x \geq -1$
 $2-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 2$
 $x-1 \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$
공통부분을 구하면 $1 \leq x \leq 2$

10. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y 의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

① $x=2, y=-1$

② $x=-1, y=-2$

③ $x=2, y=1$

④ $x=-1, y=2$

⑤ $x=1, y=2$

해설

$$(-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=-4+3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=-4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\therefore x=2, y=1$$

11. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 두 조건 $p : x^2 = 3x$, $q : x \geq 2$ 에 대하여 조건 ‘ p 이고 $\sim q$ ’를 만족하는 집합은?

- ① $\{0\}$ ② $\{1\}$ ③ $\{3\}$ ④ $\{0, 1\}$ ⑤ $\{3, 5\}$

해설

p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{0, 3\}, Q = \{2, 3, 4, 5\}$

‘ p 이고 $\sim q$ ’ 를 만족하는 집합은 $P \cap Q^c$

$\therefore P \cap Q^c = P - Q = \{0\}$

12. 다음 <보기>의 명제 중 참인 것을 모두 고른 것은? (단, a, b, c, d 는 실수)

보기

- ㉠ $ab = 0$ 이면 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.
- ㉡ $a + b > 2$, $ab > 1$ 이면 $a > 1$, $b > 1$ 이다.
- ㉢ $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.
- ㉤ $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면 $a = b = 0$ 이다.
- ㉥ $a + b > 0$ 이면 $a > 0$ 또는 $b > 0$ 이다.

- ① ㉠, ㉢

② ㉢, ㉥

③ ㉡, ㉤
- ④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉤, ㉥

해설

- ㉠ 반례 : $a = 0, b = 1$
- ㉡ 반례 : $a = 3, b = \frac{1}{2}$
- ㉢ 반례 : $a = -\sqrt{2}, b = 1$

13. 다음 명제 중 p 가 q 이기 위한 필요조건인 것은? (a, b, x, y 는 실수)

- ① $p : a > 3, q : a^2 > 9$
- ② $p : x$ 는 3 의 배수, $q : x$ 는 6 의 배수
- ③ $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$
- ④ $p : |x - 1| = 2, q : x^2 - 2x + 3 = 0$
- ⑤ $p : a < b, q : |a| < |b|$

해설

$q \Rightarrow p$ 즉 $Q \subset P$ 인 것을 고른다.

② $q : x$ 는 6 의 배수 $\Rightarrow p : x$ 는 3 의 배수 (참)

14. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

15. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계를 이용하면

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1$$

$$= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2 = 4$$

16. 2 이상의 자연수의 집합 A 에서 A 로 다음과 같이 정의된 함수 f 가 있다.

$$f(p) = p \text{ } (p\text{가 소수})$$
$$f(rs) = f(r) + f(s) \text{ } (r, s \in A)$$

이 때, $f(2400)$ 의 값을 구하면?

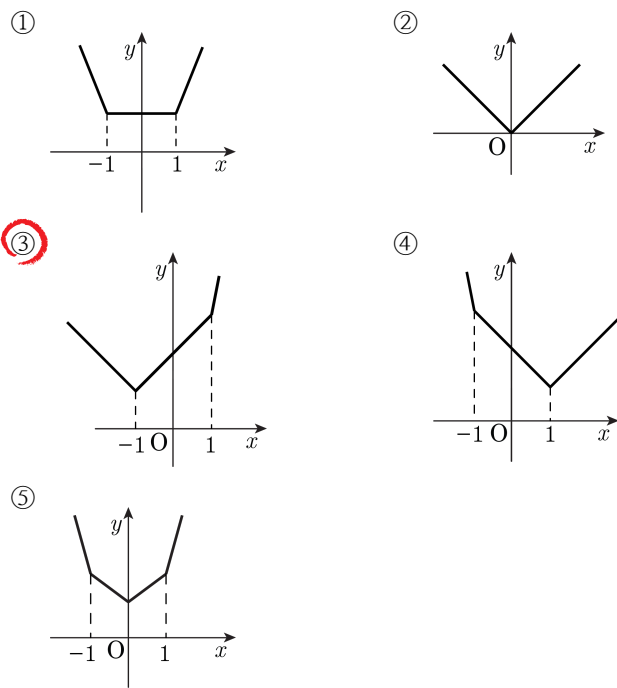
▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$$\begin{aligned} f(2400) &= f(2^5 \cdot 3 \cdot 5^2) = f(2^5) + f(3) + f(5^2) \\ &= 5f(2) + f(3) + 2f(5) \\ &= 5 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 5 = 23 \end{aligned}$$

17. 다음 중 함수 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$ 의 그래프는?



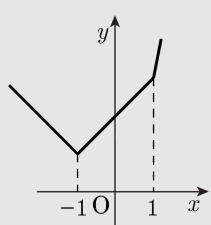
해설

i) $x \leq -1$ 일 때, $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= -(x - 1) + x - (x + 1)$
 $= -x$

ii) $-1 < x \leq 1$ 일 때 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= -(x - 1) + x + (x + 1)$
 $= x + 2$

iii) $1 < x$ 일 때 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= (x - 1) + x + (x + 1)$
 $= 3x$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



18. 변분수식 $1 - \frac{\frac{1}{a} - \frac{2}{a+1}}{\frac{1}{a} - \frac{2}{a-1}}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{a}{(a+1)^2}$

② $\frac{2a}{(a+1)^2}$

③ $\frac{3a}{(a+1)^2}$

④ $\frac{4a}{(a+1)^2}$

⑤ $\frac{5a}{(a+1)^2}$

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= 1 - \frac{\frac{-(a-1)}{a(a+1)}}{\frac{-(a+1)}{a(a-1)}} = 1 - \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2} \\ &= \frac{4a}{(a+1)^2} \end{aligned}$$

19. $x < 0$ 이고 $x^4 - x^2 + 1 = 0$ 일 때, $x + \frac{1}{x}$ 의 값을 구하면?

- ① $-\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $-\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{6}$ ⑤ $-\sqrt{7}$

해설

$x^4 - x^2 + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 3$$

$$\therefore x < 0 \text{ 이므로 } x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$$

20. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{a}{b} = p + \sqrt{q}$

이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2. \times \times \times$$

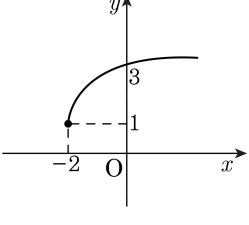
$$a = 2, b = \sqrt{3} - 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore p = 1, q = 3$$

$$\therefore p + q = 4$$

21. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)} + 1$ 또, 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
 $3 = \sqrt{2a} + 1, \sqrt{2a} = 2$
 $\therefore a = 2$
따라서 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1 = \sqrt{2x+4} + 1$ 이고,
이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로
 $a = 2, b = 4, c = 1$
 $\therefore a + b + c = 7$

22. 함수 $y = \sqrt{x-3}$ 의 역함수를 구하면?

① $y = x^2 + 3$

② $y = \sqrt{x+3}$

③ $y = x^2 - 3$

④ $y = x^2 - 3 \ (x \leq 1)$

⑤ $y = x^2 + 3 \ (x \geq 0)$

해설

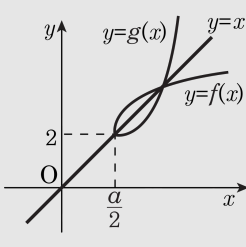
$y = \sqrt{x-3}$ 의 정의역과 치역은
각각 $x \geq 3, y \geq 0$ 이고 양변을 제곱하면
 $y^2 = x-3, x = y^2 + 3$
 $\therefore y = x^2 + 3 \ (x \geq 0, y \geq 3)$

23. 무리함수 $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

다음 그림에서 알 수 있듯
 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교
 점은
 $y = f(x)$ 의 그래프와
 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$ 라 하면
 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로
 $\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = 2\sqrt{2}$
 $\therefore (\alpha-\beta)^2 = 4 \cdots \textcircled{1}$
 한편, $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 와
 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는
 $\sqrt{2x-a} + 2 = x$ 에서 $\sqrt{2x-a} = x-2$
 양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 - 6x + 4 + a = 0$
 이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로
 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 4 + a$
 $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $4 = 36 - 4(4+a), 4+a = 8$
 $\therefore a = 4$

24. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}$, $C = \{3, 4, 9, 10\}$ 에 대하여 $A \cap (B \cup C)$ 를 원소 나열법으로 옳게 나타낸 것은?

- ① {2, 4}
- ② {4, 10}
- ③ {2, 3, 4}
- ④ {2, 4, 10}
- ⑤ {2, 4, 6, 10}

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 9, 10\}$ $A \cap (B \cup C) = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$ $= \{2, 4, 10\}$

26. 두 조건 $p : a - 4 < x \leq a + 5$, $q : |x| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p , q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 $q : -1 \leq x \leq 1$ 에서 $a + 5 \geq 1$, $a - 4 < -1$ 따라서 $a \geq -4$, $a < 3$ 이다.
즉, $-4 \leq a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

27. 실수 x 를 입력하면 실수 $\frac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\frac{2}{3}$ 를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$$

에서

$$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_2(-1) = \frac{2}{3}$$
$$f_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_4(-1) = \frac{2}{3} \cdots$$

따라서 $f_{1999}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$

28. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 3, y = 3$$

즉, 두 교점은 점 $(2, 2), (3, 3)$ 이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

29. 분수식 $\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

- ① $-1, 2$ ② $1, 2$ ③ $2, \frac{1}{2}$ ④ $1, \frac{1}{2}$ ⑤ $-1, \frac{1}{2}$

해설

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$

$$b+c = ak \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a+c = bk \cdots \textcircled{㉡}$$

$$a+b = ck \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \text{ 하면 }$$

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

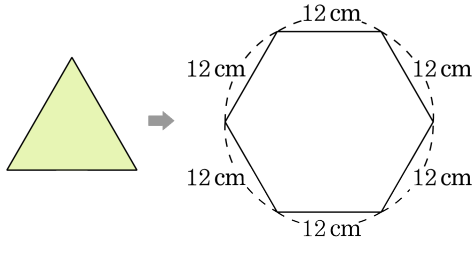
$$\text{i) } a+b+c \neq 0 \text{ 이면 } k = 2$$

$$\text{ii) } a+b+c = 0 \text{ 일 때 } b+c = -a$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

$$\therefore k = -1, 2$$

30. 한 변의 길이가 6 cm 인 정삼각형 모양의 타일을 붙여서 다음과 같은 모양을 만들려고 합니다. 정삼각형 타일은 몇 개가 필요하겠는지 구하시오.

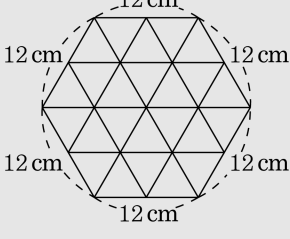


▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

종이로 정삼각형을 만들어 붙여 봅니다.



31. 자연수 전체 집합의 부분집합 A 가 두 조건

- ㉠ $1 \in A, 2 \in A$
- ㉡ $a \in A, b \in A$ 이면 $a + b + ab \in A$

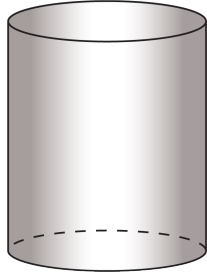
을 만족할 때, 다음 중 반드시 집합 A 의 원소라 할 수 없는 것은?

- ① $2^2 - 1$
- ② $3^3 - 1$
- ③ $4^4 - 1$
- ④ $5^5 - 1$
- ⑤ $6^6 - 1$

해설

$a + b + ab = (a + 1)(b + 1) - 1 \cdots$ ㉠ 이므로
 $1 \in A, 2 \in B$ 에서 $(1 + 1)(2 + 1) - 1 = 2 \cdot 3 - 1 \in A$
 $a = 1, b = 2 \cdot 3 - 1$ 로 놓으면
㉡에서 $(1 + 1)(2 \cdot 3 - 1 + 1) - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 2^2 \cdot 3 - 1 \in A$
 $a = 2, b = 2 \cdot 3 - 1$ 로 놓으면
㉡에서 $(2 + 1)(2 \cdot 3 - 1 + 1) - 1 = 3 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 2 \cdot 3^2 - 1 \in A$
이 과정을 반복하면 일반적으로
 $2^m \cdot 3^n - 1 \in A$ 이면 $2^{m+1} \cdot 3^{n+1} - 1 \in A$ (m, n 은 음이 아닌 정수)
따라서, A 의 임의의 원소는 $2^m \cdot 3^n - 1$ 의 꼴이다.

32. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 1m^2 당 1만원이다. 보일러의 부피가 64m^3 가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



- ① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
 ④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x , 높이를 y 라 하면,
 부피 V 는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 철판의 넓이를 S 라 하면
 $S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2\pi xy$
 $= 8x^2 + 2x \times \frac{64}{x^2} = 8x^2 + \frac{128}{x}$
 $= 8x^2 + \frac{64}{x} + \frac{64}{x} \geq 3 \sqrt[3]{8x^2 \times \frac{64}{x} \times \frac{64}{x}} = 96$
 단, 등호는 $8x^2 = \frac{64}{x}$ 일 때,
 곧 $x = 2$ 일 때 성립한다.
 따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.

33. 임의의 양수 r 에 대하여 집합 $S_r = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2, x, y \text{는 정수}\}$ 이라 하자. 집합 S_r 의 원소의 개수를 $f(r)$ 이라 할 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- I. $f(1) + f(2) = f(\sqrt{5})$
- II. $0 < r_1 < r_2$ 이면 $f(r_1) < f(r_2)$
- III. $1 \leq r \leq 3$ 의 범위에서 $f(r)$ 의 최소값은 4이고 최대값은 8이다.

- ① I
- ② II
- ③ I, III
- ④ II, III
- ⑤ I, II, III

해설

$f(r)$ 은 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 정수 순서쌍 (x, y) 의 개수이다.

I. $r = 1$ 일 때 순서쌍은

$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ 이므로

$\therefore f(1) = 4$

$r = 2$ 일 때 순서쌍은

$(2, 0), (0, 2), (-2, 0), (0, -2)$ 이므로

$\therefore f(2) = 4$

$r = \sqrt{5}$ 일 때 순서쌍은

$(1, 2), (2, 1), (1, -2), (2, -1), (-1, -2),$

$(-2, -1), (-1, 2), (-2, 1)$ 이므로,

$\therefore f(\sqrt{5}) = 8$

II. 반례: $f(1) = 4, f(\sqrt{3}) = 0$

III. 반례: $f(\sqrt{3}) = 0$