1. 집합 $A = \{x \mid x$는 17의 약수$\}$의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4개

해설

$A = \{1, 17\}$ 이므로 A의 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같다.
따라서 $2^2 = 2 \times 2 = 4$ (개)이다.

2. 집합 A 의 부분집합의 개수가 4 개일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

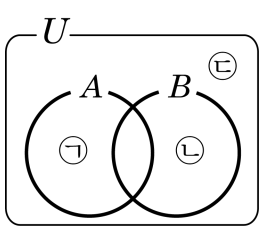
▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$2^n = 4 \ \therefore n = 2$

3. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 35$, $n(A) = 20$, $n(B) = 17$, $n(A \cap B) = 10$ 일 때, ㉠, ㉡, ㉢의 원소의 개수를 차례대로 구하여라.



▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠ : 10

▷ 정답: ㉡ : 7

▷ 정답: ㉢ : 8

해설

㉠ 부분을 집합으로 나타내면 $A - B$이므로
$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 10 = 10$이다.
㉡ 부분을 집합으로 나타내면 $B - A$이므로
$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 17 - 10 = 7$이다.
㉢ 부분을 집합으로 나타내면 $(A \cup B)^C$이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 17 - 10 = 27\text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 $n((A \cup B)^C) = 35 - 27 = 8$이다.

4. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

a, b는 양수이므로

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$$

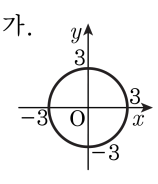
$$=5+ab+\frac{4}{ab}\geq 5+2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$$

$$=5+4=9$$

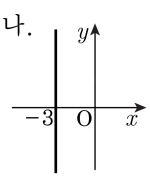
∴ 최솟값은 9

5. 다음 중 함수의 그래프인 것을 모두 고른 것은?

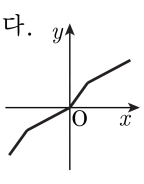
가.



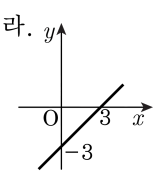
나.



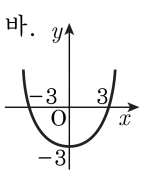
다.



라.



바.



① 가, 나, 다 ② 가, 나, 마 ③ 다, 라, 마

④ 나, 마 ⑤ 가, 마

해설

주어진 x에 y값이 하나만 대응되어야 한다.
∴ 다, 라, 마 가 함수이다.

6. 집합 $X = \{x|x\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,
$f(1) = F(3) = \cdots = F(19) = 2$
$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

7. 유리식 $\dfrac{a+b}{ac-bc} \div \dfrac{ab+b^2}{a^2-ab}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{a}{b}$ ② $\dfrac{b}{ac}$ ③ $\dfrac{c}{ab}$ ④ $\dfrac{a}{bc}$ ⑤ $\dfrac{a}{c}$

해설

$$\frac{a+b}{ac-bc} \div \frac{ab+b^2}{a^2-ab} = \frac{a+b}{(a-b)c} \times \frac{a(a-b)}{b(a+b)} = \frac{a}{bc}$$

8. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 의 분모를 유리화하면 $a+b\sqrt{c}$ 이다.
$a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b+c=13$

해설

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}$$

$$=5+2\sqrt{6}$$

$\therefore a=5, b=2, c=6$ 이므로

$a+b+c=5+2+6=13$

9. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{3,\ 4,\ 5\}$ 에서 $A \cap X = X$, $B \cup X = B$ 를 만족하는 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$,
$B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$ 이므로
$X \subset A \cap B = \{3,\ 4\}$
집합 X 는 $\{3,\ 4\}$ 의 부분집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^2 = 4$ (개)

10. $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2\}$ 에 대하여 $A\cap X=X$, $(A-B)\cup X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$(A-B)\subset X\subset A$, 즉 $\{3,4,5\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2\times2=4$(개) 이다.

11. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.

② 어떤 명제의 역과 이는 서로 대우 관계이다.

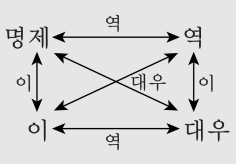
③ 어떤 명제의 역, 이, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.

④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.

⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이다. 아래 그림처럼 '역'의 대우가 '이'이다.



12. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

13. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2 ② -3 ③ -4 ④ -5 ⑤ -6

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$
$= -(ax + b) + a = -ax + a - b$ 이므로 $-ax + a - b = 2x - 4$
그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로
$a = -2, b = 2$
$\therefore ab = -4$

14. $\dfrac{x-3}{x^2+x-6} \times \dfrac{x+3}{x^2-x-6}$을 간단히 계산한 것은?

① $\dfrac{1}{x^2+4}$　② $\dfrac{1}{x^2-x-2}$　③ $\dfrac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\dfrac{1}{x^2+x-2}$　⑤ $\dfrac{1}{x^2-4}$

해설

$$(\text{준식}) = \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)}$$
$$= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}$$

15. $3x = 2y$일 때, $\dfrac{2xy + y^2}{x^2 + xy}$의 값은?

① $\dfrac{15}{7}$ ② $\dfrac{17}{8}$ ③ $\dfrac{19}{9}$ ④ $\dfrac{21}{10}$ ⑤ $\dfrac{23}{11}$

해설

$3x = 2y \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3}{2}x$

$\therefore \ \dfrac{2xy + y^2}{x^2 + xy} = \dfrac{3x^2 + \frac{9}{4}x^2}{x^2 + \frac{3}{2}x^2} = \dfrac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{21}{10}$

16. $a>0, b<0$일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}+|-a|+|-b|$를 간단히 하면?

① $2a-2b$ ② $2a$ ③ $-2b$

④ $2a+2b$ ⑤ 0

해설

$a>0,\ b<0$이므로

$|a|+|b|+|-a|+|-b|$

$=a-b-(-a)+(-b)=2a-2b$

17. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이고

$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 2+3-2 = 3$

18. 100 이하의 자연수 중에서 4 의 배수이거나 5 의 배수인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 40 개

해설

4 의 배수인 집합을 A 라 하고, 5 의 배수인 집합을 B 라 하자.
4 의 배수이면서 5 의 배수인 집합은 $A \cap B$ 이다.
4 의 배수이거나 5 의 배수인 수, 즉 $A \cup B$ 를 구하는 것이다.
$n(A) = 25, n(B) = 20, n(A \cap B) = 5$ 이므로
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$x = 25 + 20 - 5$
$x = 40$

19. 다음은 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B=\varnothing$일 때, 두 집합 A, B사이의 포함관계를 보이는 과정이다.

$A=A\cap U=A\cap(B\cup[\text{㉠}])$
$=(A\cap B)\cup(A\cap[\text{㉠}])=(A\cap B)\cup\varnothing$
$=(A\cap B)$
따라서 [㉡]

위의 (㉠), (㉡) 에 알맞는 것을 차례대로 나열하면?

① $A, B\subset A$ ② $A, A\subset B$ ③ $B^c, B\subset A$
④ $B^c, A\subset B$ ⑤ $B^c, A=B$

해설

$A=A\cap U=A\cap(B\cup B^c)$ $\therefore$ (㉠) $\cdots B^c$
$=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ ($\because$ 분배법칙)
$=(A\cap B)\cup(A-B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=(A\cap B)\cup\varnothing$ ($\because$ 가정에서 $A-B=\varnothing$)
$=A\cap B$ ($\because$ $A\cup\varnothing=A$)
그런데 $A\cap B=B$ 이므로 $A\subset B\cdots$ (㉡)

20. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, $p \nRightarrow q$에 해당하는 사례들이 속하는 집합은?

① $P^c \cup Q$　② $P \cup Q^c$　③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$　⑤ $P \cap Q^c$

해설

주어진 명제가 거짓이 되는 반례들이 속하는 집합으로 $P - Q = P \cap Q^c$

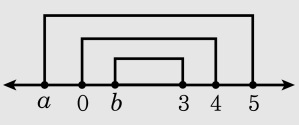
21. 두 조건 $a \le x \le 5$, $b \le x \le 3$이 각각 조건 $0 \le x \le 4$이기 위한 필요조건과 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$0 \le x \le 4 \Rightarrow a \le x \le 5$

$b \le x \le 3 \Rightarrow 0 \le x \le 4$



$\therefore a \le 0,\ b \ge 0$

a의 최댓값, b의 최솟값 모두 0이다.

22. 함수 $y = |2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

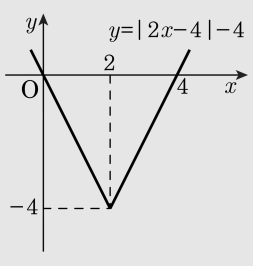
$y = |2x-4|-4 = |2(x-2)|-4$ 의 그래프는

$y = |2x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로

다음 그림과 같다.



따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

23. 다음 조건을 만족하는 집합 A 에 대하여 $\frac{1}{2} \in A$ 일 때, 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 의 원소들의 합을 구하면?

$a \in A$ 이면 $\frac{a}{a-1} \in A$ (단, $a \neq 1$)

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \in A$

$-1 \in A$ 이면 $\frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \in A$

$\frac{1}{2} \in A$ 이면 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1 \in A \cdots$

따라서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 는 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ 이므로 원소들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

24. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여 Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 이면
$f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
$x_1 = 1,\ x_2 = -1$ 이면
$f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1) \neq 0,\ f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

25. $x \geq 1$이고 $a = \dfrac{2x}{x^2+1}$일 때, $f(x) = \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

$$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$$
$$= \sqrt{1+\frac{2x}{x^2+1}} - \sqrt{1-\frac{2x}{x^2+1}}$$
$$= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}$$
$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\because\ x \geq 1)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$에서 $x = 1$일 때

최댓값 $f(1) = \sqrt{2}$