

1. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 17 \text{의 약수}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A = \{1, 17\}$ 이므로 A 의 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같다.

따라서 $2^2 = 2 \times 2 = 4$ (개)이다.

2. 집합 A 의 부분집합의 개수가 4 개일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

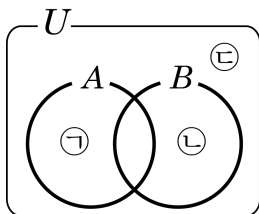
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$2^n = 4 \therefore n = 2$$

3. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 35$, $n(A) = 20$, $n(B) = 17$, $n(A \cap B) = 10$ 일 때, ㉠, ㉡, ㉢의 원소의 개수를 차례대로 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ : 10

▷ 정답 : ㉡ : 7

▷ 정답 : ㉢ : 8

해설

㉠ 부분을 집합으로 나타내면 $A - B$ 이므로
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 10 = 10$ 이다.

㉡ 부분을 집합으로 나타내면 $B - A$ 이므로
 $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 17 - 10 = 7$ 이다.

㉢ 부분을 집합으로 나타내면 $(A \cup B)^C$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 17 - 10 = 27 \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 $n((A \cup B)^C) = 35 - 27 = 8$ 이다.

4. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

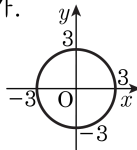
$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

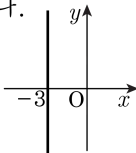
$\therefore$ 최솟값은 9

5. 다음 중 함수의 그래프인 것을 모두 고른 것은?

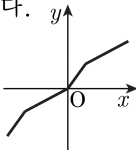
가.



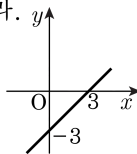
나.



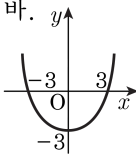
다.



라.



마.



① 가, 나, 다

② 가, 나, 마

③ 다, 라, 마

④ 나, 마

⑤ 가, 마

해설

주어진 x 에 y 값이 하나만 대응되어야 한다.

$\therefore$ 다, 라, 마 가 함수이다.

6. 집합 $X = \{x | x \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수 함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100

② 50

③ 38

④ 20

⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,

$$f(1) = f(3) = \cdots = f(19) = 2$$

$$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$$

7. 유리식 $\frac{a+b}{ac-bc} \div \frac{ab+b^2}{a^2-ab}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{a}{b}$

② $\frac{b}{ac}$

③ $\frac{c}{ab}$

④ $\frac{a}{bc}$

⑤ $\frac{a}{c}$

해설

$$\frac{a+b}{ac-bc} \div \frac{ab+b^2}{a^2-ab} = \frac{a+b}{(a-b)c} \times \frac{a(a-b)}{b(a+b)} = \frac{a}{bc}$$

8. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ 의 분모를 유리화하면 $a + b\sqrt{c}$ 이다.

$a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b + c = 13$

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} \\ &= 5 + 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

∴ $a = 5, b = 2, c = 6$ 이므로

$$a + b + c = 5 + 2 + 6 = 13$$

9. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ 에서 $A \cap X = X$, $B \cup X = B$ 를 만족하는 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$,

$B \cup X = B$ 에서 $X \subset B$ 이므로

$X \subset A \cap B = \{3, 4\}$

집합 X 는 $\{3, 4\}$ 의 부분집합이다.

따라서 집합 X 의 개수는 $2^2 = 4$ (개)

10. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2\}$ 에 대하여 $A \cap X = X, (A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

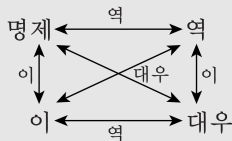
$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{3, 4, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4(\text{개})$ 이다.

11. 다음은 명제에 대한 설명이다. 옳은 것은?

- ① 어떤 명제가 참이면 그 역도 반드시 참이다.
- ② 어떤 명제의 역과 이는 서로 대우 관계이다.
- ③ 어떤 명제의 역, 이, 대우는 참, 거짓이 항상 일치한다.
- ④ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 대우가 반드시 참인 것은 아니다.
- ⑤ 어떤 명제의 역의 역은 대우이다.

해설

명제가 참이면 그 명제의 대우도 항상 참이다. 아래 그림처럼 ‘역’의 대우가 ‘이’이다.



12. 두 명제 ‘겨울이 오면 춥다.’ ‘눈이 오지 않으면 춥지 않다.’가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 없는 것은?

- ① 추우면 눈이 온다.
- ② 눈이 오면 겨울이 온다.
- ③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
- ⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.

②에서 ‘눈이 오면 겨울이 온다’는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

13. 두 함수 $f(x) = -x + a$, $g(x) = ax + b$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = 2x - 4$ 일 때, ab 의 값은 얼마인가?

① -2

② -3

③ -4

④ -5

⑤ -6

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax + b)$$

$$= -(ax + b) + a = -ax + a - b \text{ 이므로 } -ax + a - b = 2x - 4$$

그런데, 이것은 x 에 대한 항등식이므로

$$a = -2, b = 2$$

$$\therefore ab = -4$$

14. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}\end{aligned}$$

15. $3x = 2y$ 일 때, $\frac{2xy + y^2}{x^2 + xy}$ 의 값은?

① $\frac{15}{7}$

② $\frac{17}{8}$

③ $\frac{19}{9}$

④ $\frac{21}{10}$

⑤ $\frac{23}{11}$

해설

$$3x = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$\therefore \frac{2xy + y^2}{x^2 + xy} = \frac{3x^2 + \frac{9}{4}x^2}{x^2 + \frac{3}{2}x^2} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{21}{10}$$

16. $a > 0, b < 0$ 일 때, $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + |-a| + |-b|$ 를 간단히 하면?

① $2a - 2b$

② $2a$

③ $-2b$

④ $2a + 2b$

⑤ 0

해설

$a > 0, b < 0$ 이므로

$$|a| + |b| + |-a| + |-b|$$

$$= a - b - (-a) + (-b) = 2a - 2b$$

17. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이고}$$

$$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이므로}$$

$$a = 2, b = 3, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = 2 + 3 - 2 = 3$$

18. 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수이거나 5의 배수인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 40 개

해설

4의 배수인 집합을 A 라 하고, 5의 배수인 집합을 B 라 하자.

4의 배수이면서 5의 배수인 집합은 $A \cap B$ 이다.

4의 배수이거나 5의 배수인 수, 즉 $A \cup B$ 를 구하는 것이다.

$$n(A) = 25, n(B) = 20, n(A \cap B) = 5 \text{ 이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = 25 + 20 - 5$$

$$x = 40$$

19. 다음은 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B = \emptyset$ 일 때, 두 집합 A, B 사이의 포함관계를 보이는 과정이다.

$$\begin{aligned} A &= A \cap U = A \cap (B \cup [\neg]) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap [\neg]) = (A \cap B) \cup \emptyset \\ &= (A \cap B) \end{aligned}$$

따라서 $[\subset]$

위

의 $(\neg)$, $(\subset)$ 에 알맞는 것을 차례대로 나열하면?

- ① $A, B \subset A$ ② $A, A \subset B$ ③ $B^c, B \subset A$
 ④ $B^c, A \subset B$ ⑤ $B^c, A = B$

해설

$$\begin{aligned} A &= A \cap U = A \cap (B \cup B^c) \therefore (\neg) \cdots B^c \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) (\because \text{분배법칙}) \\ &= (A \cap B) \cup (A - B) (\because \text{차집합의 성질}) \\ &= (A \cap B) \cup \emptyset (\because \text{가정에서 } A - B = \emptyset) \\ &= A \cap B (\because A \cup \emptyset = A) \end{aligned}$$

그런데 $A \cap B = B$ 이므로 $A \subset B \cdots (\subset)$

20. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $p \nRightarrow q$ 에 해당하는 사례들이 속하는 집합은?

① $P^c \cup Q$

② $P \cup Q^c$

③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q$

⑤ $P \cap Q^c$

해설

주어진 명제가 거짓이 되는 반례들이 속하는 집합으로 $P - Q = P \cap Q^c$

21. 두 조건 $a \leq x \leq 5$, $b \leq x \leq 3$ 이 각각 조건 $0 \leq x \leq 4$ 이기 위한 필요조건과 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

① -2

② -1

③ 0

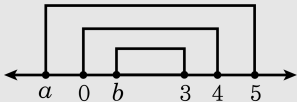
④ 1

⑤ 2

해설

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow a \leq x \leq 5$$

$$b \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$



$$\therefore a \leq 0, b \geq 0$$

a 의 최댓값, b 의 최솟값 모두 0이다.

22. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |2x - 4| - 4 = |2(x - 2)| - 4$ 의 그래프는

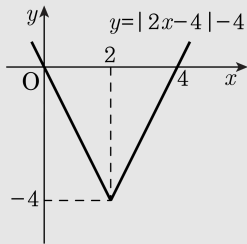
$y = |2x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로

다음 그림과 같다.

따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$



23. 다음 조건을 만족하는 집합 A 에 대하여 $\frac{1}{2} \in A$ 일 때, 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 의 원소들의 합을 구하면?

$$a \in A \text{ 이면 } \frac{a}{a-1} \in A \text{ (단, } a \neq 1 \text{)}$$

① 0

② $\frac{1}{2}$

③ $-\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

$$\frac{1}{2} \in A \text{ 이면 } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \in A$$

$$-1 \in A \text{ 이면 } \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \in A$$

$$\frac{1}{2} \in A \text{ 이면 } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1 \in A \dots$$

따라서 원소의 개수가 가장 적은 집합 A 는 $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ 이므로 원소들의 합은 $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 이다.

24. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

II. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개

② 4 개

③ 6 개

④ 8 개

⑤ 12 개

해설

조건 I에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면

$$f(0) = f(1) + f(-1) \text{ 에서, } f(-1) = -f(1)$$

이때, 조건 II에 의해

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$$

따라서, 두 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는

원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,

따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

25. $x \geq 1$ 이고 $a = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 일 때, $f(x) = \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최댓값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2x}{x^2+1}} - \sqrt{1 - \frac{2x}{x^2+1}} \\ &= \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\because x \geq 1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \\ \therefore f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \text{ 에서 } x=1 \text{ 일 때} \\ \text{최댓값 } f(1) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$