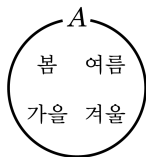


1. 다음 벤 다이어그램을 보고, 집합 A 의 원소를 구하여라.



▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 봄

▷ 정답 : 여름

▷ 정답 : 가을

▷ 정답 : 겨울

해설

집합 A 의 원소는 ‘봄, 여름, 가을, 겨울’이다.

2. 다음 보기 중 옳지 않은 것을 골라라.

보기

㉠ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 4 \text{의 배수}\}$ 일 때, $n(A) = 2$

㉡ $B = \{x \mid x \text{는 } 27 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(B) = 4$

㉢ $n(\phi) = 1$

㉤ $C = \{x \mid x \text{는 두 자리 자연수}\}$ 이면, $n(C) = 90$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $\{4, 8\}$ 이므로 $n(A) = 2$ 이다.

㉡ $\{1, 3, 9, 27\}$ 이므로 $n(B) = 4$ 이다.

㉢ 공집합은 원소의 개수가 없다. 그러므로 $n(\phi) = 0$ 이다.

㉤ $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ 이므로 $n(C) = 99 - 9 = 90$ 이다.

3. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\{4\}) = 4$

② $n(\{0\}) = 0$

③ $n(\{\emptyset\}) = 0$

④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$

⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$ 이면 $n(A) = 4$

해설

$$A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 소수}\}$$

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이다.

따라서 $n(A) = 4$ 이다.

4. 집합 $A = \{1, 2, \{1, 3\}\}$ 의 진부분 집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 7 개

해설

진부분집합은 부분집합 전체에서 자기자신을 제외한 것들이다.

$n(A) = 3$ 이므로 진부분집합의 개수 : $2^3 - 1 = 7$ (개)

5. 세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 ☐ 안에 기호 $=, \neq$ 중 알맞은 것을 순서대로 써넣어라.

$$A = \{1, 2, 5, 10\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$$

A ☐ B , A ☐ C (단, $=$ 는 ㉠, $\neq$ 는 ㉡로 입력할 것)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉠

해설

집합 B, C 를 원소나열법으로 나타내면 $B = \{1, 3, 5, 15\}$, $C = \{1, 2, 5, 10\}$ 이다.

따라서 $A \neq B$, $A = C$ 이다.

6. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 원소가 4개인 집합의 부분집합의 개수는 16개이다.
- ② 원소가 3개인 집합의 진부분집합의 개수는 7개이다.
- ③ 집합 $\{3, 6, 7\}$ 과 집합 $\{4, 5, 6\}$ 는 서로소이다.
- ④ 어떤 명제가 참이면 그 대우는 반드시 참이다.
- ⑤ 어떤 명제가 참이라고 해서 그 역이 반드시 참인 것은 아니다.

해설

- ① 부분집합의 개수 $= 2^n$ (n : 집합 원소의 개수)
- ② 진부분집합의 개수 $= 2^n - 1$
 $\therefore 2^3 - 1 = 7$ (참)
- ③ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$ 는 서로소
 $\therefore \{3, 6, 7\} \cap \{4, 5, 6\} \neq \emptyset$ (거짓)
- ④ (참)
- ⑤ (참)

7. 명제 ' $a > b$ 이면 $a^2 \geq b^2$ 이다'의 대우를 구하면?

① $a^2 \geq b^2$ 이면 $a > b$ 이다

② $a^2 > b^2$ 이면 $a \geq b$ 이다

③ $a^2 < b^2$ 이면 $a \leq b$ 이다

④ $a \leq b$ 이면 $a^2 < b^2$ 이다

⑤ $a \geq b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다

해설

$p \rightarrow q$ 의 대우는 $\sim q \rightarrow \sim p$ 이다.

$$\therefore a^2 < b^2 \Rightarrow a \leq b$$

8. 다음 ()안에 알맞은 말을 써라.

함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ()이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응

해설

9. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $1 < x \leq 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$$P = \{x \mid 1 < x \leq 3\},$$

$$Q = \{x \mid x > -2\} \text{ 라고 하면}$$

$$P \subset Q, \quad \therefore \text{충분조건}$$

$$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\},$$

$$S = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\} \text{ 라고 하면}$$

$$R = S, \quad \therefore \text{필요충분조건}$$

10. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2 + 2x + 2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

$$\text{따라서 } -2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$$

11. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$ 일 때, 합성함수 $g \circ f$ 의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 2) \\ &= 2(x + 2) - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

합성함수 $g \circ f$ 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$y = 2x + 1$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \text{ 이 된다.}$$

따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

12. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

13. 함수 $f(x) = mx + n$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$, $(f \circ f)(2) = 7$ 이 성립할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은 얼마인가?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f^{-1}(3) = 2$ 이므로

역함수의 정의에 의해서

$f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 7$ 에서 $f(f(2)) = f(3) = 7$

$$2m + n = 3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3m + n = 7 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m = 4, n = -5$

$$\therefore m + n = -1$$

14. $\frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{1}{x}$

② $\frac{2}{x}$

③ $\frac{6}{x(x+6)}$

④ $\frac{2}{x(x+2)}$

⑤ $\frac{2}{x+2}$

해설

이항분리로 푼다.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)(x+4)} + \frac{2}{(x+4)(x+6)} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = \frac{6}{x(x+6)} \end{aligned}$$

15. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ 을 간단히 하면?

① $\frac{98}{99}$

② $\frac{100}{99}$

③ $\frac{99}{100}$

④ $\frac{101}{100}$

⑤ $\frac{100}{101}$

해설

이항분리 이용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}$$

16. 다음 식을 간단히 하면?

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

① 1

② x

③ $\frac{1}{x}$

④ $\frac{1}{1-x}$

⑤ $-x$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} \\ &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

17. $3x = 2y \neq 0$ 일 때, $\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값은?

① $\frac{5}{12}$

② $\frac{12}{5}$

③ $\frac{7}{12}$

④ $\frac{12}{7}$

⑤ $\frac{10}{3}$

해설

$3x = 2y \neq 0$ 에서 $x : y = 2 : 3$

따라서 $x = 2k$, $y = 3k$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} &= \frac{3(2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 3k}{(2k)^2 + 2k \cdot 3k} \\ &= \frac{12k^2 + 12k^2}{4k^2 + 6k^2} = \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{12}{5}\end{aligned}$$

18. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것은?

① $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

② $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

③ $(A - B) \cup (A - B^c) = A$

④ $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

⑤ $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cap C)$

해설

$$\begin{aligned}(A - B) \cap (A - C) &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C)\end{aligned}$$

19. a, b, c 가 실수이고 $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ 일 때 $a + b + \sqrt{2}c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2\} (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + \sqrt{2}c)^2$$

$$\therefore (a + b + \sqrt{2}c)^2 \leq 4^2$$

$$\therefore -4 \leq a + b + \sqrt{2}c \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 -4

$$\therefore M = 4, m = -4$$

$$M - m = 8$$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

이 때, $g : X \rightarrow X$ 에 대하여 $g(1) = 3$ 이고 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $g(2) < g(3) < g(4)$

② $g(2) < g(4) < g(3)$

③ $g(3) < g(2) < g(4)$

④ $g(3) < g(4) < g(2)$

⑤ $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$ 임을 이용하여

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) \quad (\because f \circ g = g \circ f)$$

$$\therefore g(2) = 4$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$$

$$\therefore g(3) = 1$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$$

$$\therefore g(4) = 2$$

$$\therefore g(3) < g(4) < g(2)$$

21. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = 2|x - 1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M, m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 5

해설

$y = 2|x - 1| + x$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = 2|x - 1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7, $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$$M + m = 7 + 1 = 8$$

22. 두 함수 $y = \sqrt{x+1}$ 과 $y = x+a$ 의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $1 \leq a < \frac{5}{4}$

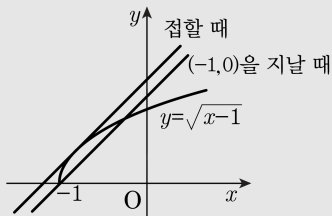
② $1 < a < \frac{5}{4}$

③ $1 \leq a \leq \frac{5}{4}$

④ $2 \leq a < \frac{5}{4}$

⑤ $1 \leq a < 3$

해설



그림에서

(i) $y = x + a$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때, $a = 1$

(ii) $y = x + a$ 와 $y = \sqrt{x+1}$ 이 접할 때

$x + a = \sqrt{x+1}$ 에서 양변을 제곱하면

$$(x+a)^2 = x+1$$

$$x^2 + (2a-1)x + a^2 - 1 = 0$$

$$D = (2a-1)^2 - 4(a^2-1) = 0$$

$$-4a + 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = 5$$

$$\therefore a = \frac{5}{4}$$

(i), (ii) $1 \leq a < \frac{5}{4}$

23. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.



답:

개



정답: 8개

해설

$A = \{1, 3, 5, 15\}$, $B = \{1, 3, 9\}$ 이므로

$A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 9, 15\}$

$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$

$\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$

X 는 원소 1, 3 을 포함하는

$\{1, 3, 5, 9, 15\}$ 의 부분집합이므로

(집합 X 의 갯수) $= 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

24. $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, y = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $\frac{y^3}{x} + \frac{x^3}{y}$ 의 값은?

① 7

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$$xy = \sqrt{(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})} = 1$$

$$x^2 = 2 + \sqrt{3} \quad y^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{y^3}{x} + \frac{x^3}{y} = \frac{x^4 + y^4}{xy}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2}{1} = 14$$

25. $y = \sqrt{x+2}$ 와 $x = \sqrt{y+2}$ 의 교점의 좌표를 P (a, b)라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ $\frac{7}{5}$

해설

두 곡선은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
두 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+2}$ 와 $y = x$ 와의
교점이다.

$$\sqrt{x+2} = x \text{ 에서 } x^2 = x+2$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore P(a, b) = P(2, 2)$$

($\because P(a, b)$ 는 제 1 사분면에 존재한다.)