

1. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

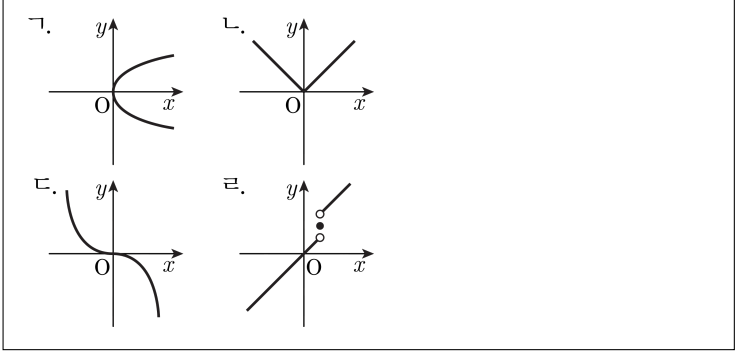
해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$ 이므로

$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

2. 다음 방정식의 자취들 중 함수인 것은 x 개, 일대일 대응인 것은 y 개이다. $x + y$ 의 값은?



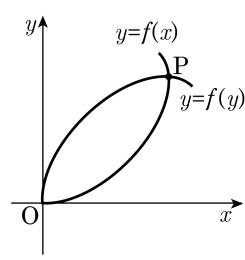
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수는 주어진 x 에 y 값이 하나씩 대응해야 한다.
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 이 함수이다.
일대일 대응은 함수 중에 치역과 공역이 일치하는 것을 말한다.
따라서 ㉢ 이 일대일 대응이다.
 $\therefore x + y = 4$

3. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?

- ① $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ② $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
 ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 2)$
 ⑤ $(2, 3)$



해설

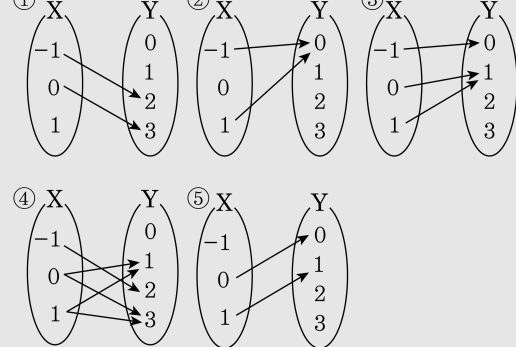
$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는 서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의 교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다. 따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로 $(2, 2)$ 이다.

4. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다. X 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음과 같은 X 에서 Y 로의 대응을 생각할 때, 이 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?
- ① $x \rightarrow x + 3$
- ② $x \rightarrow x^2 - 1$
- ③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$
- ⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X 에서 Y 로의 함수가 되려면 X 의 원소가 빠짐없이 Y 의 원소 하나에 대응해야 한다.

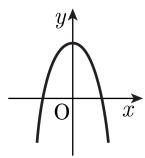
순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



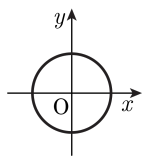
①, ②, ⑤는 Y 의 원소에 대응하지 않는 X 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X 의 원소 하나가 Y 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

5. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

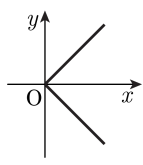
①



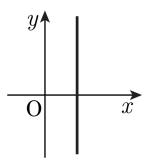
②



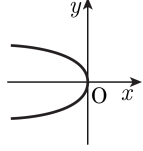
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x 값에 여러 개의 y 값이 대응될 수 없다.

6. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$ 이면
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$ 이다.
위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
 $f(x) = 1$ 은 부적당
 $\therefore f(0) = 0$

7. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

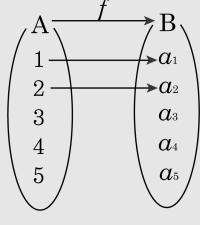
해설

두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수는 $f(x) = 1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$ 의 3개가 있다.

8. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?
- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



9. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x + 2)^2$ ② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$ ④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2$

10. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

11. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

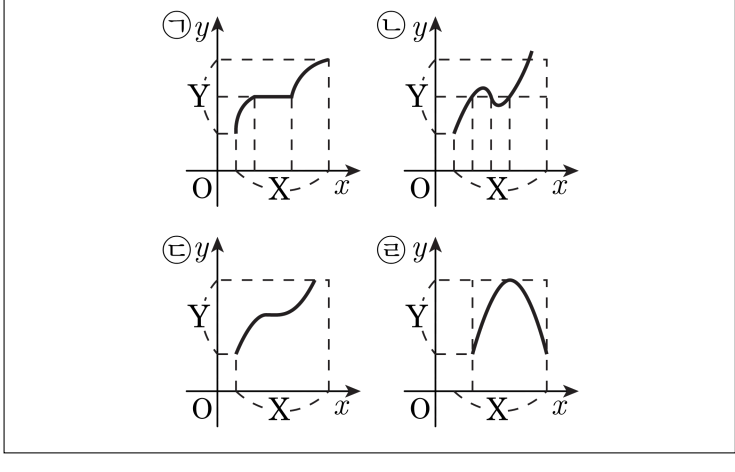
해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

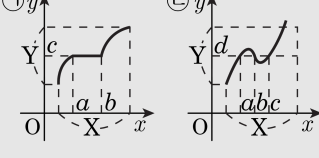
12. 함수 $f : X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① ㉠, ㉢
 ② ㉡, ㉣
 ③ ㉢
- ④ ㉠
 ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.



- ㉠ : $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.
- ㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.
- ㉢ : ㉡의 경우와 같다.

13. 두 함수 $f(x) = 2x - 5, g(x) = -x + 3$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 3

해설

$f(x) = 2x - 5, g(x) = -x + 3$ 에 대하여
 $(f^{-1} \circ g^{-1})(2) = f^{-1}(g^{-1}(2))$ 이므로
 $g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$
 $-k + 3 = 2$ 에서 $k = 1$
 $(f^{-1} \circ g^{-1})(2) = f^{-1}(1) = m$ 으로 놓으면,
 $f(m) = 1$ 에서 $2m - 5 = 1$
 $\therefore m = 3$

14. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $n(X) = n(Y)$ 이다.
- ② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$
- ③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.
- ④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.
- ⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 어야 한다.
④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

15. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f

② f^{-1}

③ g

④ g^{-1}

⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1} \text{ 이므로} \\ g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1}\end{aligned}$$

16. 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족할 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 2f(0)$
 $\therefore f(0) = 0$

17. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

18. 실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 $f : R \rightarrow R$ 를 $f(x) =$

$$\begin{cases} \pi & (x \text{는 유리수}) \\ 0 & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \text{으로 정의할 때, 합성함수 } f \circ f \text{의 치역은?}$$

- ① {0} ② $\{\pi\}$
 ③ $\{0, \pi\}$ ④ 유리수 전체의 집합
 ⑤ 실수 전체의 집합

해설

i) x 가 유리수이면 $f(x) = \pi$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\pi) = 0$
ii) x 가 무리수이면 $f(x) = 0$ 이고
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(0) = \pi$
따라서, 합성함수 $f \circ f$ 의 치역은 $\{0, \pi\}$ 이다.

19. 두 함수 $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$ 이고 $(f \circ h)(x) = g(x)$ 일 때, $h(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(f \circ h)(x) = g(x)$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(h(1)) = g(1)$

한편, $g(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ 이므로 $h(1) = k$ 라 하면

$f(k) = 1$ 에서 $f(k) = k + 3 = 1$ 이므로 $k = -2$

$\therefore h(1) = -2$

20. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \dots, f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

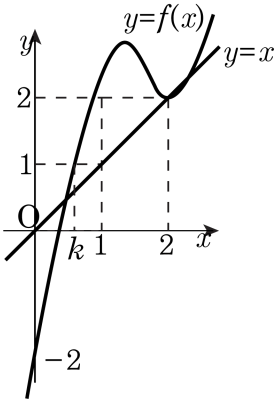
해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

21. 다음 그림과 같이 함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 2$ 에서 $f(k) = 1$ 일 때, $f^{10}(k)$ 의 값은?(단, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f^2 \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)



- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 11

해설

$$\begin{aligned} f(k) &= 1 \\ f^2(k) &= f(f(k)) = f(1) = 2 \\ f^3(k) &= f^2 \circ f(k) = f^2(f(k)) = f^2(1) \\ &= f(f(1)) = f(2) = 2 \\ &\vdots \\ f^{10}(k) &= 2 \end{aligned}$$

22. 함수 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 + ax + 3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$ 이 되는 실수 a 의 범위는? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

- ① $a \leq -3, a \geq 2$
- ② $-1 \leq a \leq 1$
- ③ $a \leq -2, a > 3$
- ④ $-2 \leq a \leq 2$
- ⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$g(x) = t$ 라 두면,
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = t^2 - t - 2 \geq 0$ 에서
 $t \leq -1, t \geq 2$ 에서
(i) $t \leq -1$
 $x^2 + ax + 3 \leq -1$
 $x^2 + ax + 4 \leq 0$ (부적절)
(ii) $t \geq 2$
 $x^2 + ax + 3 \geq 2$
 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 에서
 $D = a^2 - 4 \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq 2$

23. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여
역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f(x) = y = \frac{2x+1}{x-1} \text{의 역함수는}$$
$$x = \frac{2y+1}{y-1} \text{에서}$$
$$x(y-1) = 2y+1, xy-x = 2y+1, xy-2y = x+1$$
$$(x-2)y = x+1$$
$$\therefore y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$$
$$= \frac{ax+b}{x+c}$$
$$\therefore a=1, b=1, c=-2$$
$$\therefore a+b+c=0$$

24. $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} h(0) &= g^{-1}(0) = k \\ g(k) &= f(k+4) = 0 \\ \therefore k+4 &= 0 \\ \therefore k &= -4 \\ \therefore h(0) &= -4 \end{aligned}$$

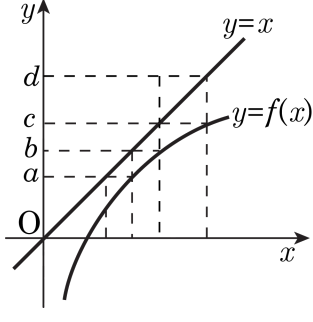
25. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

- ① x
- ② $x + 1$
- ③ $x + 2$
- ④ $x + 3$
- ⑤ $x + 4$

해설

$$h = g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서}$$
$$h \circ h = (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g)$$
$$= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)$$
$$(h \circ h)(x) = (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x)$$
$$= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x))$$
$$= g^{-1}((f \circ f)(g(x)))$$
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$$

26. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

27. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
 $f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
 $f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
 $\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1, -6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
 $f(-1) = -(-1) + 4 = 5$