

1. 함수 $y = \frac{2}{x+3} - 4$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = a, y = b$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -7 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 7

해설

점근선이 $x = -3, y = -4$ 이므로 $a - b = 1$

2. $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ 의 점근선의 방정식을 구하면 $x = a, y = b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = 2$

해설

$$\begin{aligned}y &= \frac{3x+1}{2x-1} \\&= \frac{3\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \\&= \frac{\frac{5}{2}}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서 점근선의 방정식은 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad a + b = 2$$

3. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

$$\begin{aligned} \text{I. } y &= \frac{2x-5}{x-2} \\ \text{II. } y &= \frac{2}{x-1} \\ \text{III. } y &= \frac{3x+4}{x+1} \\ \text{IV. } y &= \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

- ① I, II ② I, IV ③ II, IV
 ④ II, III ⑤ I, II, IV

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\text{이므로 } y = \frac{k}{x-p} + q$$

꼴로 정리 했을 때, $k=2$ 이면
 평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

$$\text{I. } y = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$$

$$\therefore k = -1$$

$$\text{II. } y = \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$$

$$\text{III. } y = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1} \therefore k = 1$$

$$\text{IV. } y = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$$

4. 함수 $y = \frac{k}{x-1} + 3$ ($k \neq 0$) 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.
- ㉡ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
- ㉢ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

점근선은 $x=1, y=3$ 이다.

㉠, ㉢ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

$k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

㉡ : $k < 0$ 이면, 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

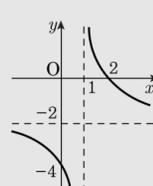
\therefore ㉡, ㉢ 이 참.

5. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 -1 , y 축으로 -2 만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② 치역은 $\mathbb{R} - \{-2\}$ 이다.
- ③ 제 2사분면을 지나지 않는다.
- ④ 점근선은 $x = 1$, $y = -2$ 이다.
- ⑤ 정의역은 $\mathbb{R} - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다. 따라서 옳지 않은 것은 ①이다.



6. 함수 $y = \frac{ax+1}{-x+b}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 2, y = -1$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = \frac{ax+1}{-x+b} \text{ 의 점근선이 } x=2, y=-1 \text{ 이므로}$$

$$b = 2 \text{ 이고}$$

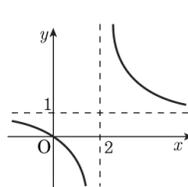
$$y = \frac{a(x-2)+2a+1}{-(x-2)} = \frac{2a+1}{-(x-2)} - a \text{ 에서}$$

$$-a = -1 \text{ 이므로}$$

$$\therefore a+b = 1+2 = 3$$

7. 함수 $y = \frac{ax-b}{-2x+c}$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$ 의 값을 구하면?
(단, a, b, c 는 상수)

- ① 2 ② 1 ③ 0
④ 1 ⑤ -2



해설

$$\begin{aligned} \text{분수함수 } y &= \frac{ax-b}{-2x+c} \\ &= \frac{ax-b}{-2\left(x-\frac{c}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{ac}{2}-b}{-2\left(x-\frac{c}{2}\right)} - \frac{a}{2} \text{의 점근선의} \end{aligned}$$

방정식은 $x = \frac{c}{2}$, $y = -\frac{a}{2}$ 이므로

$$\frac{c}{2} = 2, \quad -\frac{a}{2} = 1$$

즉, $c = 4$, $a = -2$ 이므로 $y = \frac{-2x-b}{-2x+4}$

또한, 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{-b}{4} \therefore b = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

8. 보기의 함수 중 평행이동한 그래프가 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것을 모두 고르면?

보기

$$\textcircled{\text{㉠}} y = \frac{-x-1}{x-1} \quad \textcircled{\text{㉡}} y = \frac{x}{x-1} \quad \textcircled{\text{㉢}} y = \frac{-2x-1}{x+1}$$

- ① ㉡ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α 만큼,

y 축으로 β 만큼 평행이동시키면

$$y = \frac{1}{x-\alpha} + \beta \text{ 꼴이 된다.}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} y = \frac{-x-1}{x-1} = \frac{-(x-1)-2}{x-1} = -\frac{2}{x-1} - 1$$

$$\textcircled{\text{㉡}} y = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$$

$$\textcircled{\text{㉢}} y = \frac{-2x-1}{x+1} = \frac{-2(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} - 2$$

따라서, 구하는 함수는 ㉡, ㉢이다.

9. $y = \frac{x+a}{x+1}$ 의 그래프를 x 축 및 y 축의 방향으로 평행이동 하면 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐질 때, a 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+a}{x+1} = \frac{x+1+a-1}{x+1} = 1 + \frac{a-1}{x+1} \text{을 평행이동하여}$$

$$y = \frac{1}{x} \text{과 겹치려면 } a-1=1$$

$$\therefore a=2$$

10. 분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1, 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)

- ① $\{y \mid y < 0 \text{ 또는 } y > 2\}$ ② $\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$
 ③ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$ ④ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } 1 < y \leq 2\}$
 ⑤ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } y \geq 2\}$

해설

분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$$x = -\frac{1}{a} = -1$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \frac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나

므로

$$2 = \frac{1+b}{1+1} \quad \therefore b = 3$$

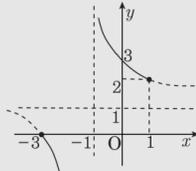
$$\therefore y = \frac{x+3}{x+1}$$

따라서 $-3 \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq 1$ 에서

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1 \text{ 의 그래프는}$$

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$$\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$$



11. 함수 $y = \frac{2x+4}{x-1}$ 의 그래프가 점 (a, b) 에 대하여 대칭일 때, $a+b$ 의 값은?

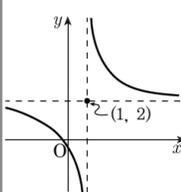
- ① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+4}{x-1} \\ &= \frac{2(x-1)+6}{x-1} \\ &= \frac{6}{x-1} + 2 \text{이므로} \end{aligned}$$

주어진 함수의 그래프는 점 $(1, 2)$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore a+b = 1+2 = 3$$



12. 함수 $y = \frac{ax+b}{2x+c}$ 가 점 (1,2) 를 지나고 점근선이 $x=2, y=1$ 일 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

점근선이 $x=2, y=1$ 이므로

$$y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{k}{x-2} + 1$$

또 점 (1,2) 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{1-2} + 1 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{-1}{x-2} + 1 = \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-6}{2x-4}$$

$$\therefore a=2, b=-6, c=-4$$

$$\therefore a+b+c = -8$$

13. 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \frac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

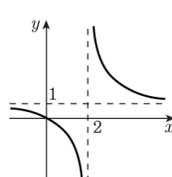
$$\therefore c = -7$$

따라서 $f(x) = \frac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

14. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2



해설

점근선이 $x=2$, $y=1$ 이므로

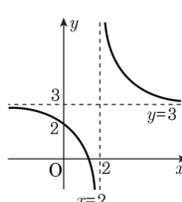
$$y = \frac{ax+b}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c} \text{ 에서 } a=1, c=-2 \text{ 이다.}$$

그리고 원점을 지나므로 $b=0$ 이다.

$$\therefore a+b+c = -1$$

15. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2, y=3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① -6 ② -4 ③ -3
 ④ 2 ⑤ 7



해설

점근선이 $x=2, y=3$ 이므로 $a=3, c=-2$

점(0, 2)를 지나므로 $\frac{b}{c} = 2$

$\therefore b = -4$

$\therefore a+b+c = -3$

16. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = x$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = x$$

$\therefore g(1)$ 을 구하려면, $\frac{x+2}{2x-1} = 1$ 이 되어야 한다.

$$\Rightarrow x = 3 \quad \therefore g(1) = 3$$

17. 유리함수 $y = \frac{bx+c}{x-a}$ 의 그래프가 점 (2,7)을 지나고 이 함수의 역함수가 $y = \frac{x+c}{x-3}$ 일 때, a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

① -27 ② -9 ③ -3 ④ 3 ⑤ 9

해설

점 (2,7)을 지나면 역함수는 (7,2)를 지난다.

$$2 = \frac{7+c}{7-3} \text{ 에서 } c = 1$$

이제 원래 함수를 구해보면 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 에서

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3x+1}{x-1} \dots\dots \text{역함수}$$

$$\therefore a = 1, b = 3, c = 1$$

$$\therefore abc = 3$$

18. 두 함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$, $y = m(x-1) + 1$ 의 그래프가 만날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 고르면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

분수함수 $y = \frac{1}{x-1} + 1$ 의 그래프는

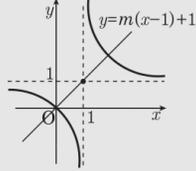
점근선이 $x = 1$, $y = 1$ 이고,
점 $(0, 0)$ 을 지난다.

$y = m(x-1) + 1$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을
지나는 직선이므로 두 함수가 만나기 위한
실수 m 의 값의 범위는

다음 그림에서 $m > 0$ 이다.

따라서, 보기 중 m 의 값이 될 수 있는 것은

⑤이다.



19. 다음과 같은 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \emptyset$ 일때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

$$A = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{|x-1|}{x} \right\}$$

$$B = \{ (x, y) \mid y = ax \}$$

- ① $a < 0$ ② $a > 0$ ③ $0 < a < 1$
 ④ $0 \leq a \leq 1$ ⑤ $a < 0, a > 1$

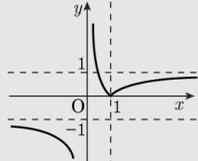
해설

$$y = \frac{|x-1|}{x} \text{에서}$$

$x \geq 1$ 일 때,

$$y = \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x} + 1$$

$$x < 1 \text{일 때, } y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$



$A \cap B = \emptyset$ 이려면 위의 곡선과 원점을 지나는 직선 $y = ax$ 가 만나지 않아야 하므로, 위쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만 존재해야 한다.

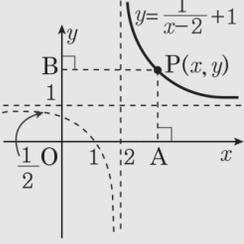
따라서 구하는 a 의 값의 범위는 $a < 0$

20. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 $P(x, y)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x - 2$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$$

(단, 등호는 $x-2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

21. 전체집합 $U = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 의 부분집합

$$A = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{1}{x} \right\}, B = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{1}{x} \right\}, C = \left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{2}{x} \right\},$$

$$D = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{2}{x} \right\} \text{에 대하여 다음 포함관계 중 옳지 않은 것은?}$$

① $A \supset C$

② $B \supset D$

③ $A \cap B = \emptyset$

④ $C \cap D = \emptyset$

⑤ $A - B = A$

해설

$y = \frac{1}{x} \dots ①$, $y = \frac{2}{x} \dots ②$ 의 그래프는

다음 그림과 같다.

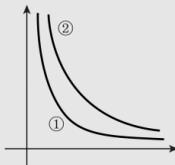
A의 영역이 C의 그것을 포함하므로 ①은 옳다.

D의 영역이 B의 그것을 포함하므로 ②는 옳지 않다.

A와 B는 만나지 않으므로 ③은 옳다.

C와 D는 만나지 않으므로 ④는 옳다.

A와 B는 만나지 않으므로 ⑤ 역시 옳다.



22. $x^2 \neq 1$ 이고 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때 $f(-x)$ 는?

① $\frac{1}{f(x)}$

② $-f(x)$

③ $\frac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$

⑤ $f(x)$

해설

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{에서}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

23. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y = |x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3} \text{ 를}$$

$$x \text{에 대하여 풀면, } x = \frac{3y+4}{y+2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸면, } y = f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c} \text{ 이므로 } a=3, b=4, c=2$$

함수 $y = |x+3|+6$ 은 $x = -3$ 일 때, 최솟값 6을 갖는다.

24. $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선이 $x = a, y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = -1$

해설

$$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-1}{x+1} \dots \textcircled{1} \text{에서}$$

x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{-x+2}{x+1} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \Rightarrow -f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{x+1}$$

점근선 $x = -1, y = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

25. a, b 가 양수일 때, $2 \leq x \leq 3$ 을 만족하는 임의의 실수 x 에 대하여 $ax + 2 \leq \frac{2x-1}{x-1} \leq bx + 2$ 가 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

해설

$$\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1} \quad (2 \leq x \leq 3) \text{ 이므로}$$

$$ax + 2 \leq 2 + \frac{1}{x-1} \leq bx + 2$$

$$ax \leq \frac{1}{x-1} \leq bx$$

$$\text{위의 그래프에 의하여 } a \leq \frac{1}{6}, b \geq \frac{1}{2}$$

