1. $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3)^2$ 의 값은?

① 110 ② 120 ③ 130 ④ 140 ⑤ 150

해설

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{10} 4a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 12a_k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\
&= 4 \times 20 - 12 \times 5 + 9 \times 10 \\
&= 80 - 60 + 90 = 110
\end{aligned}$$

2. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{10} = 30$을 만족할 때 $\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$의 값은?

① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$\sum_{k=1}^{9} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$

$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) -$

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_9)$

$= -a_1 + a_{10} = -1 + 30 = 29$

3. $\sum_{l=1}^{10}\left\{\sum_{k=1}^{5}(k+l)\right\}$ 의 값은?

① 400 ② 425 ③ 450 ④ 475 ⑤ 500

해설

$\sum_{l=1}^{5}(k+l)=\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}l=\sum_{k=1}^{5}k+5l$

$\therefore$ (준 식) $=\sum_{l=1}^{10}(5l+15)=5\sum_{l=1}^{10}l+150$

$=5\times55+150=425$

4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 10n$, $\sum_{k=1}^{n} b_k = 5n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k - 3b_k + 5)\right\}$ 의 값은?

① 250 ② 300 ③ 450 ④ 550 ⑤ 650

해설

$$\sum_{n=1}^{10} \left\{2\sum_{k=1}^{n} a_k - 3\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n} 5\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{10}(2 \cdot 10n - 3 \cdot 5n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10}(20n - 15n + 5n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10} 10n = 10 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}$$
$$= 550$$

5. 다음 수열의 합을 $\sum$ 기호를 써서 나타내면?

$3+6+12+\cdots+3\cdot 2^{n-1}$

① $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$　② $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k-1}$　③ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k}$

④ $\sum_{k=1}^{n-1} 3\cdot 2^{k}$　⑤ $\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k+1}$

해설

제 k항은 $3\cdot 2^{k-1}$, 항 수는 n이므로

$3+6+9+\cdots+3\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}$

6. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})=(3n+2)^2$을 만족할 때, $\sum_{k=31}^{60} a_k$의 값은?

① 2520 ② 2620 ③ 2720 ④ 2820 ⑤ 2920

해설

$\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$
$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$
$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{3n}$
$=\sum_{k=1}^{3n} a_k=(3n+2)^2$
$\sum_{k=31}^{60} a_k=\sum_{k=1}^{60} a_k-\sum_{k=1}^{30} a_k$
$=(3\cdot 20+2)^2-(3\cdot 10+2)^2$
$=62^2-32^2=3844-1024=2820$

7. 다음을 계산하여라.

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1045

해설

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \cdots + 10 \cdot 28$

$= \sum_{k=1}^{10} k \cdot (3k - 2)$

$= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 - 2k)$

$= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k$

$= 3 \cdot \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \dfrac{10 \cdot 11}{2}$

$= 1155 - 110$

$= 1045$

8. 1 에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로
1 에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면
$(1+2+3+\cdots+10)^2 = (1^2+2^2+\cdots+10^2)+2S$

$$2S = \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 2640$$

$\therefore S = 1320$

$\therefore \frac{S}{10} = 132$

9. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$을 n에 대한 식으로 나타내면?

① $n^2 + 1$　　② $n^2 + 3n$　　③ $2n^2$

④ $2n^2 + n$　　⑤ $3n^2 - 1$

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$이므로

$n \geq 2$일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \cdots\cdots ㉠ \end{aligned}$$

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = 2$

이것은 ㉠에 $n = 1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 2n$

$\therefore a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k - 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (4k-2) \\ &= 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= 2n^2 \end{aligned}$$