1. $x > 2$ 일 때 $4x + \dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $t > 0$ 이고 $x = t + 2$
따라서 주어진 식을 t 로 나타낸 다음 산술평균과 기하평가의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x-2} &= 4(t+2) + \frac{1}{t} \\ &= 4t + \frac{1}{t} + 8 \\ &\geq 2\sqrt{4t + \frac{1}{t}} + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4t = \dfrac{1}{t}$ 일 때 성립)

2. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=-x^2+x$ 에 대하여 $(f\circ g)(2)$, $(g\circ f)(2)$ 의 함숫값을 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -47　② -35　③ 12　④ 37　⑤ 47

해설

$a=(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(-2)=-5$
$b=(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(7)=-42$
$\therefore\ a-b=-5-(-42)=37$

3. 두 집합 $X = \{-2, \ -1, \ 0, \ 1\}$, $Y = \{1, \ 3, \ 5, \ 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 를 $f(x) = 2x + 5$ 로 정의 할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$ 의 값은 얼마인가?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a, \ f^{-1}(5) = b$ 로 놓으면
$f(a) = 1, \ f(b) = 5$
$f(x) = 2x + 5$ 이므로
$f(a) = 1$ 에서 $2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$
$f(b) = 5$ 에서 $2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$
$\therefore a + b = -2$

4. 등식 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}=$ $\dfrac{(\quad\quad)}{x(x+4)}$ 를 성립시키는 (   )속에 들어갈 알맞은 수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)\\ &=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\\ &=\frac{x+4-x}{x(x+4)}\\ &=\frac{4}{x(x+4)}\end{aligned}$$

5. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}$ 을 계산하면?

① $-\dfrac{1}{a}$ ② -1 ③ 1 ④ $\dfrac{1}{a}$ ⑤ $a-1$

해설

$$
\begin{aligned}
1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}} &= 1-\dfrac{1}{\dfrac{1-a-1}{1-a}} \\
&= 1-\dfrac{1-a}{-a} = \dfrac{a+1-a}{a} = \dfrac{1}{a}
\end{aligned}
$$

6. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x - 3 + \frac{1}{x} = 0$, $x + \frac{1}{x} = 3$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$

7. $x=\sqrt{2}+1$, $y=\sqrt{2}-1$ 일 때,
$\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$$
$$=\frac{x+y-2\sqrt{xy}+x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x-y}$$
$$\begin{cases} x+y=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2} \\ x-y=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2 \end{cases}$$
$$\therefore\ \frac{2(x+y)}{x-y}=\frac{2\times 2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

8. 유리수 a, b에 대하여 $(1+2\sqrt{2})a+(-1+\sqrt{2})b=5+7\sqrt{2}$가 성립할 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 2 ③ 0 ④ −2 ⑤ −3

해설

$(1+2\sqrt{2})a+(-1+\sqrt{2})b=5+7\sqrt{2}$
$(a-b)+(2a+b)\sqrt{2}=5+7\sqrt{2}\cdots$ ㉠
a, b가 유리수이면
$a-b$, $2a+b$도 유리수이므로 ㉠에서

$$\begin{cases} a-b=5 \\ 2a+b=7 \end{cases}$$

이것을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-1$
$\therefore\ a+b=3$

9. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 다음 중 '$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소가 속하는 집합은?

① $P \cap Q^c$ ② $P \cup Q^c$ ③ $P \cap Q$
④ $P^c \cap Q$ ⑤ $P^c \cap Q^c$

해설

'$\sim p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓이므로 대우명제 'q 이면 p 이다.'도 거짓이다. 즉 $Q \subset P$ 가 거짓이므로 $Q - P \neq \varnothing$ 임을 보이면 된다. 따라서 $Q \cap P^c$ 에 속하는 원소이다.

10. 우리 학교에서 다음 두 명제는 참이다.

㉠ 우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석한다.
㉡ 우리학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않는다.

이 때, 다음 명제 중 참인 것은?

① 어떤 동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.

② 우리학교 학생들은 모두 동아리 회원이다.

③ 동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.

④ 우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이 아니다.

⑤ 우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이다

해설

①, ②, ③은 직관적으로 판단해도 거짓이다. 우리 학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않았고, 모든 우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석하였다고 하였으므로 우리학교 학생 중에는 동아리 회원이 아닌 학생이 있음을 알 수 있다. 따라서 ④는 참이다. 한편 동아리 회원이 한 명도 없는 경우도 주어진 두 조건 ㉠, ㉡를 만족하므로 ⑤번은 거짓이 된다.

∴ 답 ④

11. 두 명제 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 <u>아닌</u> 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, a, b, x는 실수이고 c는 자연수)

㉠ $p : a^2 = ab,\ q : a = b$
㉡ $p : x = 1,\ q : x^2 + x - 2 = 0$
㉢ $p : a = 3,\ q : a^2 = 9$
㉣ $p : c$ 는 4 의 배수 $q : c$ 는 짝수

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$p \rightarrow q$는 참이고 그 역인 $q \rightarrow p$는 참이 아닌 경우를 고르면 된다.
$p \rightarrow q$ 가 참이려면 p, q의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$가 성립한다.
㉠ $a = 0$일 때 $a \neq b$ 이어도 조건 p 가 성립하므로 $p \nrightarrow q$이다.

12. $p : -1 \le x \le 1$ 또는 $x \ge 3$, $q : x \ge a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

두 조건 p, g 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
$\therefore \; a \le -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

13. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p 는 s 이기 위한 필요조건이다.

14. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

15. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1)=f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

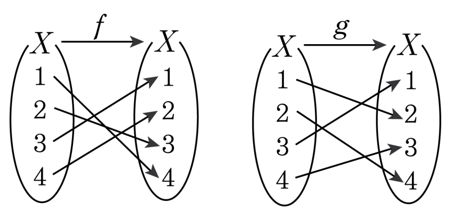
▷ 정답: -3

해설

등식 $g(x+1)=f(x-1)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

16. 두 함수 f, g 가 각각 다음 그림과 같이 정의될 때, $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

함수 f 는 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
이 때, $f(4) = 2$ 이므로 $f^{-1}(2) = 4$
$\therefore \left(g \circ f^{-1}\right)(2) = g\left(f^{-1}(2)\right) = g(4) = 3$

17. 등식 $\frac{225}{157}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

▷ 정답 : $b=2$

▷ 정답 : $c=3$

▷ 정답 : $d=4$

▷ 정답 : $e=5$

해설

$\frac{225}{157}=1+\frac{68}{157}=1+\cfrac{1}{\frac{157}{68}}$

$=1+\cfrac{1}{2+\frac{21}{68}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{5}{21}}}$

$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5$

18. $-1 < a < 3$일 때, $\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}$를 간단히 하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

(준식) $=\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$
$=|a+1|+|a-3|=(a+1)-(a-3)=4$

19. 세 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 10\}$, $B = \{x \mid x$는 9보다 작은 짝수$\}$, $C = \{x \mid x = 2 \times n, n = 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C \subset A = B$　　② $A \subset B \subset C$　　③ $B \subset A \subset C$

④ $B = C \subset A$　　⑤ $A = C \subset B$

해설

$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $C = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$
따라서 $B = C \subset A$ 의 포함 관계가 성립한다.

20. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이상 15 이하의 자연수 $\}$, $B = \{x \mid x$는 12 이상 18 미만의 3의 배수 $\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

보기

$$X \subset A,\ B \subset X,\ n(X) = 4$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

$B = \{12,\ 15\}$

$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$

$\{12,\ 15\} \subset X \subset \{10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15\}$

집합 X는 집합 A의 부분집합 중 원소 12, 15 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 집합이므로 $\{10,\ 11,\ 12,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 13,\ 15\}$, $\{10,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 13,\ 15\}$, $\{11,\ 12,\ 14,\ 15\}$, $\{12,\ 13,\ 14,\ 15\}$ 의 6개이다.

21. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\left(A \cap B^C\right) \cup \left(B \cap A^C\right) = \varnothing$ 일 때, $n(A) - n(B)$ 와 같은 값을 모두 고르면? (정답 3 개)

① $n((A \cup B) - n(A \cap B))$　　② $n(\varnothing)$

③ $n(B) - n(A)$　　④ $n(A)$

⑤ $n(B)$

해설

$\left(A \cap B^C\right) \cup \left(B \cap A^C\right) = (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$ 이므로 $A - B = \varnothing$, $B - A = \varnothing$ 이다.
따라서 $A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A = B$ 이다.
따라서 $n(A) - n(B) = 0$ 이고,
① $n((A \cup B) - n(A \cap B)) = 0$
② $n(\varnothing) = 0$
③ $n(B) - n(A) = 0$ 이다.

22. 전체집합 U 의 세 부분집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 집합연산이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$

② $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$

③ $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

④ $(A\cup C)-(B\cup C)=A-(B\cup C)$

⑤ $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cup C)$

해설

① (좌변)
$=(A-B)\cup(A-C)$
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=A\cap(B^c\cup C^c)$
$=A\cap(B\cap C)^c$ ($\because$ 분배법칙과 드 모르간의 법칙)
$=A-(B\cap C)$
=우변 ($\because$ 차집합의 성질)
② (우변)
$=(A\cup B)\cap(A\cap B)^c$
$=(A\cup B)-(A\cap B)$ ($\because$ 차집합의 성질)
벤다이어그램을 그려보면 좌변과 같음을 확인할 수 있다.
③ (좌변)
$=(A-C)\cup(B-C)$
$=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=(A\cup B)\cap C^c$
$=(A\cup B)-C$ (우변) ($\because$ 분배법칙과 차집합의 성질)
④ 좌변
$=(A\cup C)-(B\cup C)$
$=(A\cup C)\cap(B\cup C)^c$ ($\because$ 차집합의 성질)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B\cup C)^c]$ ($\because$ 분배법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup[C\cap(B^c\cap C^c)]$ ($\because$ 드 모르간의 법칙)
$=[A\cap(B\cup C)^c]\cup\varnothing$
$=A\cap(B\cup C)^c$
$=A-(B\cup C)$ (우변)
⑤ 좌변
$=A-(B-C)=A\cap(B\cap C^c)^c$
$=A\cap(B^c\cup C)$ ($\because$ 차집합의 성질과 드 모르간의 법칙)
$=(A\cap B^c)\cup(A\cap C)$
$=(A-B)\cup(A\cap C)\neq$ 우변 $\rightarrow$ 모두를 벤다이어그램을 그려서 비교할 수 있다.

23. 두 집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(A)=20,\ n(B)=16,\ n(A\cup B)=29$ 일 때, $n(A-B)-n(B-A)$ 는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=20+16-29=7$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=20-7=13$

$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=16-7=9$

$\therefore\ \ n(A-B)-n(B-A)=13-9=4$

24. 다음은 명제 '$3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)' 에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

> … (생략) …
> m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$이므로, $n^2 + 1$은 3의 배수이다.
> 한편, 정수 n이 어떤 정수 k 에 대하여
> $n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
> $n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
> $n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$이므로 n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
> 따라서 $n^2 + 1$을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.
> … (생략) …

다음 중 위의 (가) 에 가장 알맞은 것은?

① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.

② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.

③ m, n이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.

④ m, n이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.

⑤ m, n이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$은 3 의 배수이다. … ㉠
한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,
$n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
$n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
$n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$ 이므로, n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서, $n^2 + 1$을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. … ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$을 만족하는 m, n이 모두 정수인 해는 없다.

25. 함수 $f(x)$가 임의의 $x,\ y$에 대하여 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족시킬 때 $2f(0) + f(2)$의 값은? (단, $f(1) = 1$)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 는 임의의 $x,\ y$ 에 대하여 항상 성립하므로

$x = 1,\ y = 0$ 일 때 $f(1) \cdot f(0) = f(1) + f(1)$

$\therefore\ f(0) = 2\ (\because\ f(1) = 1)$

$x = 1,\ y = 1$ 일 때 $f(1) \cdot f(1) = f(2) + f(0)$ 에서 $1 = f(2) + 2$

$\therefore\ f(2) = -1$

$\therefore\ 2f(0) + f(2) = 4 - 1 = 3$

26. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a\,|\,x-1\,| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　　② $-1 < a < 1$　　③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$　　⑤ $a < -1,\ a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
$x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
$x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
$\therefore\ -2(a-1) > 0$
$\therefore\ a < 1$

27. 세 함수 $f(x) = 2x+1,\ g(x) = x-3,\ h(x) = ax+b$ 에 대하여 $(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 가 성립할 때 상수 a, b 의 합을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 3 ④ -6 ⑤ 6

해설

$(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I$ 이므로

$(g \circ f)^{-1} \circ h = g$ 에서 $h = (g \circ f) \circ g$

$$\begin{aligned} ((g \circ f) \circ g)(x) &= (g \circ f)(g(x)) = (g \circ f)(x-3) \\ &= g(f(x-3)) \\ &= g(2(x-3)+1) = g(2x-5) \\ &= (2x-5)-3 = 2x-8 \end{aligned}$$

$2x-8 = ax+b$ 에서 $a = 2, b = -8$

$\therefore a+b = -6$

28. 분수식 $\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

① $-1, 2$　② $1, 2$　③ $2, \frac{1}{2}$　④ $1, \frac{1}{2}$　⑤ $-1, \frac{1}{2}$

해설

$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$

$b+c=ak\cdots$㉠

$a+c=bk\cdots$㉡

$a+b=ck\cdots$㉢

㉠ + ㉡ + ㉢하면

$2(a+b+c)=k(a+b+c)$

ⅰ) $a+b+c\neq 0$이면 $k=2$

ⅱ) $a+b+c=0$일 때 $b+c=-a$

$\frac{b+c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$

$\therefore k=-1, 2$

29. 분수함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ 의 그래프에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> 보기
>
> Ⅰ. $f(0) = g(0) = -1$
>
> Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 y 축에 대하여 대칭이다.
>
> Ⅲ. $y = f(x-1)$ 의 그래프와 $y = g(x+1)$ 의 그래프의 점근선은 같다.

① Ⅰ　② Ⅰ, Ⅱ　③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

해설

Ⅰ. $f(0) = -1,\ g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = -1$

$\therefore f(0) = g(0) = -1$ -<참>

Ⅱ. $y = f(x)$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것은 $y = f(-x)$ 이므로

$y = f(-x) = \dfrac{-x-1}{-x+1}$

$= \dfrac{x+1}{x-1}$

$= \dfrac{1}{f(x)}$

$= g(x)$ -<참>

Ⅲ. $y = f(x-1) = \dfrac{x-2}{x} = 1 - \dfrac{2}{x}$

따라서, 점근선은 $x = 0, y = 1$

$y = g(x+1) = \dfrac{x+2}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$

따라서 점근선은 $x = 0, y = 1$ -<참>

따라서 옳은 것은 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) 이다.

30. 함수 $y = -\frac{2}{x} + 2$의 그래프와 직선 $y = 2x + k$가 서로 만나지 않을 때, 정수 k의 개수는?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$-\frac{2}{x} + 2 = 2x + k$ 에서 $-2 + 2x = 2x^2 + kx$

$2x^2 + (k-2)x + 2 = 0$이 이차방정식의 판별식을

D라 하면 $D = (k-2)^2 - 16 < 0$에서

$k^2 - 4k - 12 < 0$, $(k+2)(k-6) < 0$

$\therefore\ -2 < k < 6$

따라서 이를 만족하는 정수 k의 값은

-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5의 7개이다.

31. 집합 A 에 대하여 집합 2^A 을 $2^A = \{X | X \subset A\}$ 로 정하자. $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A \in 2^A$

㉡ $X \in 2^A$ 이고 $Y \in 2^A$ 이면 $X \cap Y \in 2^A$ 이다.

㉢ $2^A = B$라고 하면 $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \in 2^B$ 이다.

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $A \subset A$ 이므로 $A \in 2^A$ 이다. (참)
㉡ $X \in 2^A$ 이고 $Y \in 2^A$ 이면 $X \cap Y \subset A$ 이다. $\therefore X \cap Y \in 2^A$ (참)
㉢ $A = \{1, 2, 3\}$ 에서 $\{1\} \in 2^A, \{2\} \in 2^A, \{3\} \in 2^A$ 이므로
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \subset 2^A$
즉, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \subset B$
$\therefore \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} \in 2^B$ (참)

32. 전체 집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대해 $A \subset C$일 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

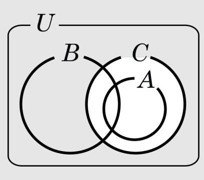
보기

㉠$A \subset (B \cap C)$
㉡$(B \cup C)^c \subset A^c$
㉢$(A - B) \subset B^c$

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉡,㉢ ④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$A \subset C \Rightarrow A \cap C = A$
㉠ $A \subset C$ 이므로 $A \supset (B \cap C)$
㉡ $A \subset (B \cup C) \leftrightarrow A^c \supset (B \cup C)^c$ (참)
㉢ $(A - B) \cap B = \varnothing \Rightarrow (A - B) \subset B^c$ (참)



33. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } a^2\text{을 } 10\text{으로 나눈 나머지, } a\text{는 자연수}\}$ 일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 64 개

해설

제곱수의 일의 자리를 살펴보면 1^2 은 1, 2^2 은 4, 3^2 은 9, 4^2 은 6, 5^2 은 5, 6^2 은 6, 7^2 은 9, 8^2 은 4, 9^2 은 1, 10^2 은 0, 11^2 은 1, $\cdots$ 이므로

$A = \{0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9\}$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이다.

34. 집합 $A = \{x|x$는 m보다 작거나 같은 자연수$\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개 이상인 부분집합을 차례로 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_N$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족하는 m 값을 구하여라. (단, $S(A)$ 는 집합 A 의 원소의 총합이다.)

$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_N) = 225$

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$A = \{x|x$ 는 m 보다 작거나 같은 자연수$\} = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$

집합 A 의 모든 부분 집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 2^{m-1} (번) 이고, 원소가 1 개 이하인 부분집합에 각 원소가 포함되는 횟수는 1 번이므로,

$S(A_1) + S(A_2) + S(A_3) + \cdots + S(A_N) = (2^{m-1} - 1) \times \left(\frac{m(m+1)}{2}\right) = 225$

$225 = 3^2 \times 5^2$ 이고, $2^{m-1} - 1 \le 255$ 인 범위에서 $2^{m-1} - 1$ 은 $5^2 = 25$ 의 배수가 될 수 없으므로,

$\frac{m(m+1)}{2}$ 은 5 의 배수가 되어야 한다.

$\frac{m(m+1)}{2}$ 이 5 의 배수가 되도록 작은 수부터 차례로 넣어보면

$m = 5$

35. 집합 $P = \left\{2x+1 | x\text{는 6보다 작은 자연수}\right\}$ 의 부분집합 $A = \{3, 5\}, B = \{5, 7, 9\}$ 에 대하여 $A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 집합 P 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 4 개

해설

$P = \left\{2x+1 | x\text{는 6보다 작은 자연수}\right\} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$
$A = \{3, 5\}, B = \{5, 7, 9\}$
$A \cup X = B \cup X$ 를 만족하는 X 는 원소 $3, 7, 9$ 를 반드시 포함하는 집합 P 의 부분집합이다.
따라서 부분집합 X 의 개수는 $2^{5-3} = 4$ (개)

36. $f_k(a) = (a$ 를 k 로 나누었을 때의 나머지$)$ 라고 정의한다.
자연수 전체의 집합 N 의 부분집합 $A_k = \left\{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\right\}$ 에 대하여 $n(A_3 \cap A_4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f_k(a) = (a$ 를 k 로 나누었을 때의 나머지$)$,
$A_k = \left\{x | f_k(x^2) = 1, x < 10\right\}$ 라는 조건에서
x^2 의 값이 될 수 있는 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 이다.
$A_3 = \{1,\ 4,\ 16,\ 25,\ 49,\ 64\}$,
$A_4 = \{1,\ 9,\ 25,\ 49,\ 81\}$,
$A_3 \cap A_4 = \{1,\ 25,\ 49\}$ 이다.
따라서, $n(A_3 \cap A_4) = 3$ 이다.

37. 자연수 k 에 대하여 집합 $A_k = \left\{x | k < x \leq 20k \text{인 자연수}\right\}$ 일 때, $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_{10})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A_1 = \{2, 3, \cdots, 20\}$
$A_2 = \{3, 4, \cdots, 40\}$
$A_3 = \{4, 5, \cdots, 60\}$
$\vdots$
$A_{10} = \{11, 12, 13, \cdots, 200\}$
$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10} = \{11, 12, \cdots, 20\}$
$\therefore n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{10}) = 10$

38. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 f를 $f(x) = r$(r은 $3x$를 10으로 나눈 나머지)로 정의할 때, f^n이 항등함수가 되는 최소의 자연수 n의 값은? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n은 자연수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 f의 대응을 조사해 보면

$1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 7 \xrightarrow{f} 1$

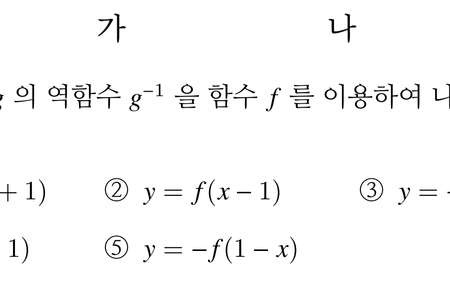
$2 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 2$

$5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} f\ 5$

$\therefore\ f^4 = f^8 = f^{12} = \cdots = I$(항등함수)

$\therefore$ 최소의 자연수는 4

39. 다음의 그림 (가) 는 함수 f 의 역함수 f^{-1} 의 그래프이고, 그림 (나) 는 함수 g 의 그래프이다.



가 나

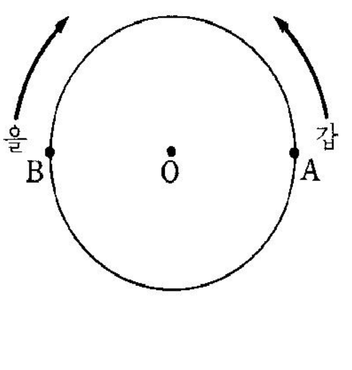
다음 중 함수 g 의 역함수 g^{-1} 을 함수 f 를 이용하여 나타내면?

① $y=-f(x+1)$ ② $y=f(x-1)$ ③ $y=-f(x-1)$
④ $y=f(x+1)$ ⑤ $y=-f(1-x)$

해설

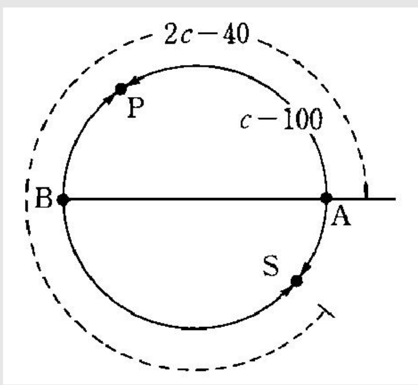
그림 (가) 의 그래프를 y 축에 대칭이동한 후
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
그림 (나) 의 그래프와 일치한다.
즉, $y=f^{-1}(x)$ 를 y 축에 대칭이동하면
$y=f^{-1}(-x)\cdots$ ㉠이다.
㉠을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면
$y=f^{-1}(-x)-1\cdots$ ㉡이다.
㉡의 역함수는 $x=f^{-1}(-y)-1\cdots$ ㉢이므로
㉢에서 $f^{-1}(-y)=x+1$ 이다.
$\therefore y=-f(x+1)$
$\therefore g^{-1}(x)=-f(x+1)$

40. 갑, 을 두 사람이 원형 트랙의 반대편 두 지점 A, B 에서 동시에 일정한 속도로 서로 반대 방향으로 출발하였다. 을이 100 m 를 갔을 때 두 사람은 처음 만났고, 갑이 A 지점을 40 m 남겨 두고 두번째 만났다면 트랙 한 바퀴의 둘레의 길이는? (단, 두번째 만날 때까지 두 사람은 아직 트랙을 한 바퀴도 돌지 못했다고 한다.)



① 260 m ② 390 m ③ 520 m
④ 650 m ⑤ 780 m

해설



트랙 둘레의 길이를 $2c$ 라 하고, A, B를 출발점 P, S 를 각각 첫 번째, 두 번째로 만나는 점이라고 하자.
점 P 까지의 갑, 을의 이동 거리는 갑 : $c-100$, 을 : 100
S 까지의 갑, 을의 이동 거리는 갑 : $2c-40$, 을 : $c+40$
문제의 뜻으로부터 두 사람의 이동 속도가 일정하고 P, S 점까지 이동하는 데 걸린 시간이 같으므로
갑, 을의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면
시간 : $\dfrac{\text{이동거리}}{\text{속도}}$ 에서
$\dfrac{c-100}{v_1}=\dfrac{100}{v_2}\cdots$ ㉠
$\dfrac{2c-40}{v_1}=\dfrac{c+40}{v_2}\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\dfrac{c-100}{2c-40}=\dfrac{100}{c+40}$
$(c-100)(c+40)=100(2c-40)$
$c^2-60c-4000=200c-4000$
$c^2-260c=0,\ c(c-260)=0$
$\therefore c\neq 0$ 이므로 $c=260$
따라서 트랙의 길이는 $2c=520$ (m)

41. $a,\ b$는 실수이고 $a^3 = 26 + 15\sqrt{3},\ b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$의 값은 ?

① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 1

해설

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
$\quad = 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52 \cdots$ ①
$(ab)^3 = a^3b^3 = (26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3}) = 1$
$\therefore\ ab = 1,\quad a+b = t$로 놓으면
① 에서 $t^3 - 3t - 52 = 0,\ (t-4)(t^2+4t+13) = 0$
$a,\ b$가 실수이므로 t도 실수이다.
$\therefore\ t = 4$, 즉 $a+b=4$

$$(\text{준식}) = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$$

$a+b=4,\ ab=1$이므로
$a,\ b$는 $x^2-4x+1=0$의 근이고
$a^3 > b^3$이므로 $a > b$
$\therefore\ a = 2+\sqrt{3},\ b = 2-\sqrt{3}$
$\therefore\ a-b = 2\sqrt{3}$

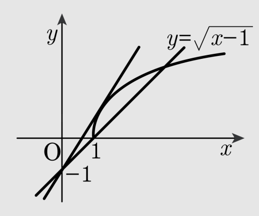
$$\therefore (\text{준식}) = \frac{4+2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

42. 두 함수 $y = \sqrt{x-1}$, $y = mx-1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 m의 값의 범위는 $\alpha \le m < \beta$이다. $\alpha + 2\beta$의 값을 구하면?

① $3+\sqrt{2}$　　② $2+\sqrt{2}$　　③ $4-\sqrt{2}$

④ $4+\sqrt{3}$　　⑤ $4+3\sqrt{2}$

해설



$y = \sqrt{x-1}$ ⋯ ㉠

$y = mx-1$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $mx-1 = \sqrt{x-1}$ (양변 제곱)

$m^2x^2 - 2mx + 1 = x - 1$

$m^2x^2 - (2m+1)x + 2 = 0$ (두 점에서 만나므로)

$D = (2m+1)^2 - 8m^2 > 0$

$4m^2 + 4m + 1 - 8m^2 > 0$

$4m^2 - 4m - 1 < 0$

$\therefore \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ⋯ ㉢

㉡ 이 점 $(1,\ 0)$을 지나거나 윗쪽에 있으므로

$0 \le m - 1 \therefore m \ge 1$ ⋯ ㉣

㉢과 ㉣에서 $1 \le m < \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \alpha = 1,\ \beta = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \alpha + 2\beta = 2 + \sqrt{2}$