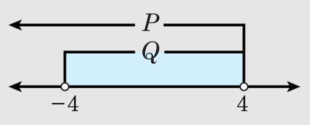
1. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q : -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

2. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요 ② 충분
③ 필요충분 ④ 아무 조건도 아니다.
⑤ q 에 따라 다르다.

해설
p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

3. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$　② $ab \ge 0$　③ $a+b \ge 0$

④ $ab < 0$　⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

4. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$　　② $xy>0$　　③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$　　⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y|=|x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy=|xy|$

(i) $xy=|xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy=|xy|$

(i), (ii) 에서

$xy=|xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

5. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0$, $|a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

② $|ab|+ab$, $|ab|=-ab$, $ab \ge 0$

③ $|ab|-ab$, $|ab|=-ab$, $ab \le 0$

④ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab$, $|ab|=ab$, $ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

6. $a>0$일 때, $2a+\dfrac{1}{2a}$의 최솟값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$a>0$이므로 $2a>0$산술기하평균의 관계로부터

$2a+\dfrac{1}{2a} \geq 2\cdot\sqrt{2a\cdot\dfrac{1}{2a}}=2$

7. 양수 $a,\ b$에 대하여 $a^2+b^2=1$을 만족할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 최솟값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$a^2>,\ b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$
(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)
그런데 $a^2+b^2=1$ 이므로 $1 \geq 2ab$
$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$
$\frac{1}{a^2}>0,\ \frac{1}{b^2}>0$이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}}$
$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}}=4$
(단, 등호는 $a^2=b^2$ 일 때 성립)
따라서 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

8. 실수 x, y에 대하여 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$이 성립할 때, $x + y$의 최댓값은?

① $\sqrt{7}$ ② 3 ③ $\sqrt{13}$ ④ 5 ⑤ 12

해설

코시-슈바르츠부등식에 의해서

$(2^2 + 3^2)\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2\right\} \geq (x+y)^2$

$13 \geq (x+y)^2$ 이므로

$-\sqrt{13} \leq x + y \leq \sqrt{13}$

$\therefore x + y$의 최댓값은 $\sqrt{13}$

9. a, b, x y가 실수이고, $a^2+b^2=8, x^2+y^2=2$일 때 $ax+by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -4 \leq ax+by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

10. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^2+y^2+z^2=6$일 때 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z$의 최댓값 M과 최솟값 m은?

① $M=3,\ m=0$　　② $M=3, m=-3$

③ $M=6, m=0$　　④ $M=6, m=-6$

⑤ $M=6, m=-12$

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$\left\{1+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$

$\geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$

$36 \geq (x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2$

$-6 \leq x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z \leq 6$

$\therefore M=6,\ m=-6$

11. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단, a, b 는 실수)

(i) p : a, b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수 (ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : ____________ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

12. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 <u>아닌</u> 것은?

① $p : x = -1,\ q : |x| = 1$

② p : $\triangle$ABC 에서 $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$, q : $\triangle$ABC 는 이등변삼각형

③ $p : a^2 + b^2 = 0$ (단, $a,\ b$ 는 실수), $q : a = b = 0$

④ $p : x + y \geq 2,\ xy \geq 1,\ q : x \geq 1,\ y \geq 1$

⑤ $p : A \cap B = A,\ q : A \subset B$

해설

① 두 조건 $p,\ q$ 의 진리집합을 각각 $P,\ Q$ 라고 하면 $P = \{-1\},\ Q = \{-1,\ 1\}$ 이므로 $P \subset Q,\ Q \not\subset P$
따라서, $p \Rightarrow q,\ q \nRightarrow p$ 이므로
p 는 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.
② $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이면 $\triangle$ABC 는 이등변삼각형이다.
$\therefore\ p \Rightarrow q$
그런데 $\triangle$ABC 가 이등변삼각형이라고 해서 $\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 인 것은 아니다.
$\therefore q \nRightarrow p$
③ $a,\ b$ 가 실수일 때, $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
④ $x + y \geq 2,\ xy \geq 1$ 이라고 해서 $x \geq 1,\ y \geq 1$ 인 것은 아니다.
$\therefore\ p \nRightarrow q$
⑤ $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

13. 다음에서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (단, a, b, c는 실수)

① $p : a = 1, b = 1,\ q : a + b = 2\ , ab = 1$

② $p : a, b$ 는 짝수, $q : a + b$ 는 짝수

③ $p : a = b,\ q : ac = bc$

④ $p : a - 1 = 0,\ q : a^2 - 1 = 0$

⑤ $p : ab > 0,\ q : |a + b| = |a| + |b|$

해설

ⓛ 충분조건 ⓒ 충분조건 ⓡ 충분조건
ⓜ 충분조건 $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

14. 다음에서 조건 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : x = 0$이고 $y = 0$, $q : xy = 0$

② $p : x^2 = 9$, $q : x = 3$

③ $p : x, y$는 모두 짝수, $q : x + y$는 짝수

④ $p : x \neq 0$이고 $y \neq 0$, $q : xy \neq 0$

⑤ $p : x$는 유리수, $q : x^2$ 은 유리수

해설

① $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 0,\ y = 1$)
② $p \rightarrow q$: 거짓 ($x^2 = 9$ 이면 $x = \pm 3$)
③ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 1,\ y = 3$ 이면 $x + y = 4$)
④ 필요충분조건
⑤ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = \sqrt{2}$ 이면 $x^2 = 2$)

15. p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것을 보기에서 모두 고른 것은?(단, 모든 문자는 실수임)

보기

㉠ $p : x > 1, y > 1,\ q : x + y > 2$

㉡ $p : xy = 0,\ q : x = 0$ 또는 $y = 0$

㉢ $p : x < 0$ 또는 $y < 0,\ q : x + y < 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

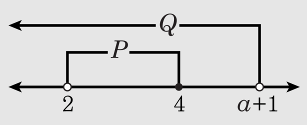
㉠은 충분조건
㉡은 필요충분조건
㉢은 필요조건

16. 두 조건 $p : 2 < x \le 4, q : x < a + 1$에 대하여 p는 q 이기 위한 충분조건 일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a > 3$

해설



$p \to q$이므로 $a + 1 > 4 \Rightarrow a > 3$

17. 두 조건 $p : x > a,\ q : -3 \le x \le 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하면?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때,
p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \to p$,
즉, $Q \subset P$ 가 성립한다.
$P = \{x \mid x > a\},\ Q = \{x \mid -3 \le x \le 1\}$ 이므로 $a < -3$
$\therefore$ 정수 a 의 최댓값은 -4 이다.

18. 두 조건 $p : -5 \leq x < 6$, $q : 2a-3 < x \leq a+2$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : $a = 5$ 개

해설

두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하면

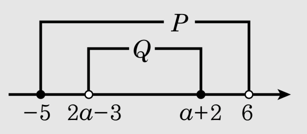
$P = \{x \mid -5 \leq x < 6\}$,

$Q = \{x \mid 2a-3 < x \leq a+2\}$

이때, p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$\therefore\ Q \subset P$

따라서, 다음 수직선에서



$2a-3 \geq -5$ 이고 $a+2 < 6$

$2a \geq -2$ 이고 $a < 4$

$\therefore\ -1 \leq a < 4$

따라서, 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

19. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$ ② $B\subset A$ ③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$ ⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A와 B의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

20. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답: 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$
$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$
$(P \cap U) \cap Q = P$
$P \cap Q = P$
$P \subset Q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

21. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ $\therefore$ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$
$\therefore$ q 는 p 이기 위한 필요조건

22. 세 조건 $p,\ q,\ r$에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \cdots\cdots$ ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \cdots\cdots$ ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡ 에서 $p \Rightarrow q,\, q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p,\, p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
$\therefore$ 필요충분조건

23. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $|a-b| \geq |a|-|b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$-a(a < 0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(|a|+|b|+|c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)$

$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$

$\therefore |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2$ $(\because |a||b| \geq ab)$

$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$

24. 모든 실수 x, y 에 대하여 $x^2+2axy+by^2=0$ 이 항상 성립하기 위한 실수 a, b 의 조건은?

① $a \le b^2$　② $b^2 \le a$　③ $a^2 \le b$
④ $b \le a^2$　⑤ $a^2 = b$

해설

모든 실수 x 에 대하여
$x^2+2axy+by^2 \ge 0$ 이 성립하려면
$D/4=(ay)^2-by^2=(a^2-b)y^2 \le 0$
이 부등식이 모든 y 에 대하여 성립하려면
$y^2 \ge 0$ 이므로 $a^2-b \le 0$
$\therefore a^2 \le b$

25. 다음 중 절대부등식 $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $a = b$ ② $ab > 0$ ③ $a = b = 0$

④ $a > b$ ⑤ $b > a$

해설

$a^2 + b^2 + ab = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2$

$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ $(\because \ \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 \geq 0, \ \frac{3}{4}b^2 \ 0)$

$\therefore a^2 + b^2 \geq ab$

단, 등호는 $a + \frac{1}{2}b = 0$ 이고 $b = 0$

즉,$a = 0$ 이고 $b = 0$일 때, 성립한다.

26. $a > 0,\ b > 0$일 때, $(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right) = 16+1+\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$

$a > 0,\ b > 0$이므로 $\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a}\cdot\frac{2a}{b}} = 8$

$\therefore$ 최솟값은 $17+8=25$

27. $a > 0$, $b > 0$ 일 때, $(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 18

해설

$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right) = 10 + \frac{b}{a} + \frac{16a}{b}$

산술기하조건을 사용하면

$\frac{b}{a} + \frac{16a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 8$

$\therefore$ 최솟값은 $10 + 8 = 18$

28. 두 실수 $x,\ y$의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

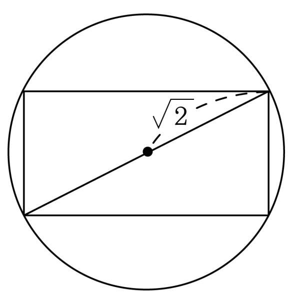
▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

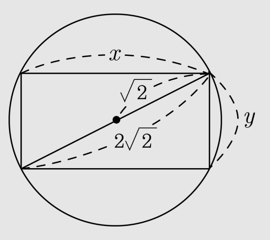
코시-슈바르츠 부등식에 의해
$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$
$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$
$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$
$\therefore\ M=10,\ m=-10$
$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

29. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면
$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times 8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)
$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.

30. $0 < a < b,\ a + b = 1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

$1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$
② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$
④ $\sqrt{b-a} < 1$
⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - 1^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - 1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$
$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2 - (\sqrt{b-a})^2 = 1 - b + a$
$= (a+b) - b + a$
$= 2a > 0$
$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b - a - (b - 2\sqrt{ab} + a)$
$= 2\sqrt{ab} - 2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$
$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

31. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, $a,\ b,\ c$ 는 실수)

㉠ $a,\ b,\ c$ 중 적어도 하나는 1 보다 크다.
㉡ $a,\ b,\ c$ 의 최댓값이 1 보다 크다.
㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1 보다 크다.

① 필요, 충분, 필요충분
② 충분, 필요충분, 충분
③ 필요, 필요충분, 충분
④ 충분, 필요, 필요충분
⑤ 필요, 필요, 충분

해설

㉠ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면, $a-1,\ b-1,\ c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이 므로 필요조건 역으로 $a=2,\ b=2,\ c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아 니다.
∴ 필요조건
㉡ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면 $a,\ b,\ c$ 중 하나 또는 셋이 1 보다 크므로 최댓값은 1 보다 크다. 역으로 $a=2,\ b=2,\ c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아니다.
∴ 필요조건
㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1 보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이므로 충분조건 역으로 $a=2,\ b=0,\ c=0$ 이면 최솟값은 0 이 므로 필요조건은 아니다.
∴ 충분조건

32. 임의의 실수x, y에 대한 부등식 $|x-y| \le |x|+|y|$에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x \le 0,\ y \ge 0$　② $x \ge 0,\ y \le 0$　③ $y = -x$

④ $xy < 0$　⑤ $xy \le 0$

해설

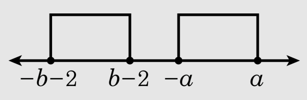
$|x-y| = |x|+|y|$에서 양변을 제곱하여 정리하면 $-2xy = 2|xy|$,
$|xy| = -xy$, $xy \le 0$ 역으로 $xy \le 0$이라 가정하면
ⅰ) $x = 0$또는$y = 0$ 일 때 등식은 성립하고
ⅱ) $xy < 0$ 일 때도 등식은 성립한다.
$\therefore\ |x-y| \le |x|+|y| \Leftrightarrow xy \le 0$

33. 두 집합 $A,\ B$ 가 $A = \{x \mid x^2 - a^2 \le 0\}$, $B = \{x \mid |x+2| \le b\}$ 일 때, $A \cap B = \varnothing$ 이기 위한 필요충분조건은? (단, $a > 0,\ b > 0$)

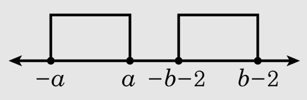
① $ab = 2$　② $ab = 4$　③ $a + b > 2$
④ $a + b < 4$　⑤ $a + b < 2$

해설

$A = \{x \mid x^2 - a^2 \le 0\} = \{x \mid -a \le x \le a\}$ $B = \{x \mid |x+2| \le b\}$ $= \{x \mid -b-2 \le x \le b-2\}$ $A \cap B = \varnothing$ 이기 위해서는 그림과 같아야 한다.



또는



그런데 $a > 0,\ b > 0$ 에서 $-b-2 < 0$ 이므로아래 수직선의 경우는 모순이다. 위의 수직선에서 $b - 2 < -a$ 이므로 만족하는 조건은 $a + b < 2$ $(\because a > 0, b > 0)$

34. $a > 0,\ b > 0$ 이고 $x = a + \frac{1}{b},\ y = b + \frac{1}{a}$ 이라 할 때, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^2 + y^2 = \left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{1}{b^2}\right) + \left(b^2 + \frac{2b}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$

$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)$

그런데 $a > 0,\ b > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균의 관계에 의하여

$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$

(등호는 $a^2 = \frac{1}{a}^2$ 일 때)

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$

(등호는 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ 일 때)

$b^2 + \frac{1}{b}^2 \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b^2}} = 2$

(등호는 $b^2 = \frac{1}{b^2}$ 일 때)

$\therefore\ x^2 + y^2 \geq 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 8$

따라서, $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 8 이다.

35. 실수 x에 대하여, 분수식 $\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\frac{x^4+3x^2+6}{x^2+1}$

$=\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+1)}+\frac{4}{(x^2+1)}$

$=(x^2+1)+\frac{4}{(x^2+1)}+1$

$x^2+1>0$이므로,

$(x^2+1)+\frac{4}{(x^2+1)} \geq 2\cdot\sqrt{(x^2+1)\cdot\frac{4}{(x^2+1)}}=4$

$\therefore\ (x^2+1)+\frac{4}{(x^2+1)}+1 \geq 4+1=5$