

1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① 작은 짝수의 모임
- ② 우리나라 광역시의 모임
- ③ 10보다 작은 자연수의 모임
- ④ 흥미로운 교과목의 모임
- ⑤ 우리나라에서 인구수가 많은 도시의 모임

해설

- ① '작은'이라는 단어는 기준이 명확하지 않으므로 집합이 될 수 없다.
- ④ '흥미로운'이라는 단어는 개인에 따라 기준이 달라지므로 집합이 될 수 없다.
- ⑤ '많은'이라는 단어는 기준이 명확하지 않으므로 집합이 될 수 없다.

2. 다음 중 집합 $\{1, 2, 4\}$ 의 진부분집합인 것을 모두 구하여라.

- ㉠ \emptyset
- ㉡ $\{1, 2\}$
- ㉢ $\{x \mid x \text{는 } 4\text{의 약수}\}$
- ㉣ $\{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\}$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 정답: ㉠

▶ 정답: ㉡

해설

$\{1, 2, 4\}$ 의 진부분집합은 $\{1, 2, 4\}$ 의 부분집합 중 $\{1, 2, 4\}$ 를 제외한 나머지 부분집합이다.

㉢ $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4\}$ 이다. 진부분집합은 자신을 제외한 것이므로 진부분집합이 아니다.

㉣ $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다. 따라서 $\{1, 2, 4\}$ 의 부분집합이 아니다.

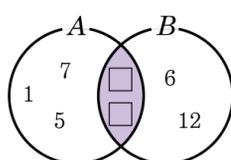
4. 두 집합 $A = \{6, 12\}$, $B = \{12, a\}$ 가 서로 같을 때, a 의 값으로 옳은 것은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

두 집합 A, B 가 서로 같으므로 $\{6, 12\} = \{12, a\}$
따라서 $6 = a$

5. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타낼 때, \square 안에 알맞은 수를 쓰시오.



▶ 답:

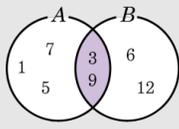
▶ 답:

▶ 정답: 3

▶ 정답: 9

해설

$A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



6. 원소의 개수가 30인 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A \cup B) = 18$ 일 때, $n(A^c \cap B^c)$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

$$n(A \cup B) = 18$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 30 - 18 = 12$$

7. $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)}$ 을 계산하면?

① 1

② $\frac{1}{x}$

③ $\frac{1}{x-1}$

④ $\frac{x}{x-1}$

⑤ $\frac{x+1}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)^2 + x}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - 2x + x - 1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x^2 - x}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)}{x(x-1)} = 1 \end{aligned}$$

8. 유리식 $\frac{x^2-4}{x^2-1} \div \frac{x^2-x-2}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

- ① $\frac{x}{x+1}$ ② $\frac{x}{x-1}$ ③ $\frac{x+2}{x-1}$
④ $\frac{x+2}{(x+1)(x-2)}$ ⑤ $\frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

9. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$\begin{aligned} A &= 3x^2 - xy + 2y^2 \\ B &= 2x^2 + 3xy - 3y^2 \end{aligned}$$

- ① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$
④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

10. $a > 0$ 일 때, $A = 1 + \frac{a}{2}$, $B = \sqrt{1+a}$ 의 대소를 바르게 비교한 것은?

- ① $A > B$ ② $A < B$ ③ $A \geq B$
④ $A \leq B$ ⑤ $A = B$

해설

$a > 0$ 이므로 $1 + \frac{a}{2} > 0$, $\sqrt{1+a} > 0$

제곱을 하여 비교하면

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - (\sqrt{1+a})^2 \\ &= 1 + a + \frac{a^2}{4} - 1 - a \\ &= \frac{a^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

따라서 $A^2 > B^2$ 이므로 $A > B$ 이다.

11. 양수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

12. 다음 중 함수가 아닌 것을 고르면?

① $2y = x - 1$ ② $y = -x^2 - 8$ ③ $y = 5$

④ $x = y^2 - 4$ ⑤ $y = 3|x| - 1$

해설

함수는 하나의 x 값에 두 개 이상의 y 값이 대응될 수 없다.



④ : $x = y^2 - 4$

13. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

14. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

- ㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.
- ㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.
- ㉢ 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉡. $f: X \rightarrow Y, f^{-1}: Y \rightarrow X$ 이므로,
 $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y, f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
 $\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

15. $x : y : z = 3 : 4 : 5$ 일 때, $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{50}{47}$ ② $\frac{47}{50}$ ③ $\frac{49}{50}$ ④ $\frac{24}{25}$ ⑤ $\frac{26}{25}$

해설

$$x : y : z = 3 : 4 : 5 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k (k \neq 0)$$

$$\therefore x = 3k, y = 4k, z = 5k$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{3k \cdot 4k + 4k \cdot 5k + 5k \cdot 3k}{(3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2} \\ &= \frac{47k^2}{50k^2} = \frac{47}{50} \end{aligned}$$

16. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

$$\begin{aligned} \text{I. } y &= \frac{2x-5}{x-2} \\ \text{II. } y &= \frac{2}{x-1} \\ \text{III. } y &= \frac{3x+4}{x+1} \\ \text{IV. } y &= \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

- ① I, II ② I, IV ③ II, IV
 ④ II, III ⑤ I, II, IV

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\text{이므로 } y = \frac{k}{x-p} + q$$

꼴로 정리 했을 때, $k=2$ 이면
 평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

$$\text{I. } y = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$$

$$\therefore k = -1$$

$$\text{II. } y = \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$$

$$\text{III. } y = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1} \therefore k = 1$$

$$\text{IV. } y = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$$

17. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a, y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3 \text{ 에서 점근선은}$$

$$x = -1, y = 3$$

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

18. 다음 집합 중에서 조건제시법을 원소나열법으로, 원소나열법을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은? (정답 2개)

① $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\} = \{1, 3, 6, \dots\}$

② $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 30 \text{보다 작은 소수}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots, 23, 29\}$

④ $\{3, 6, 9, 12\} = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, \dots, 99\} = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 홀수}\}$

해설

① $\{1, 3, 5, \dots\}$

② $\{1, 2, 5, 10\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수}\}$

19. 두 일차함수 $f(x) = ax + b$ 와 $g(x) = a'x + b'$ 사이에 $f^{-1} = g$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

- ① $a = a'$ ② $aa' = 1$ ③ $aa' = -1$
④ $a + a' = 0$ ⑤ $a + a' = -1$

해설

$y = ax + b$ 의 역함수를 구해 보면

$$x = ay + b \text{ 에서 } y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\text{즉, } f(x) \text{ 의 역함수는 } g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = a'x + b'$$

따라서, $\frac{1}{a} = a'$ 에서 $aa' = 1$ 이다.

20. 두 다항함수 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(3)$ 의 값을 구하시오. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g)(3) &= f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(8) \\ f^{-1}(8) = a \text{라 놓으면 } f(a) &= 2a + 2 = 8 \\ \therefore a = f^{-1}(8) &= 3\end{aligned}$$

21. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

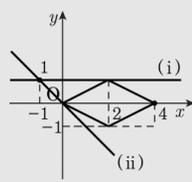
- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$ 따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

22. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($d > 0$) 와 $g(x) = \frac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f \circ g)(x) = x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x = m, y = n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f \circ g = I$ 이므로

$$g = f^{-1} \text{ 또는 } g^{-1} = f$$

$y = g(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y = \frac{x+2}{3x+4} \Leftrightarrow 3yx+4y = x+2$$

$$\Leftrightarrow (3y-1)x = -4y+2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4y+2}{3y-1}$$

$$\therefore y = g^{-1}(x) = \frac{-4x+2}{3x-1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g^{-1}(x) \\ &= \frac{-4x+2}{3x-1} \\ &= \frac{3x-1}{cx+d} \quad (d > 0) \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-2}{-3x+1} \\ &= \frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{점근선의 방정식은 } x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}, n = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m+n = -1$$

23. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 5)\}$
 $A \times C = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$
 $\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$
따라서 $n((A \times B) \cap (A \times C)) = 0$

24. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
 y 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$ 분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \text{㉠}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서 xy 의 최댓값은 45이다.

25. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$