

1. $3 - \sqrt{2}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a + \frac{2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 + \sqrt{2}$

해설

$1 < \sqrt{2} < 2$ 이므로 $a = 1, b = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } a + \frac{2}{b} &= 1 + \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \\ &= 1 + \frac{2(2 + \sqrt{2})}{2} \\ &= 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

2. 첫째항이 -10 , 공차가 -3 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-3n - 7$

② $-3n - 5$

③ $-n - 7$

④ $-n - 5$

⑤ $-n + 3$

해설

$$a_n = -10 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n - 7$$

3. 다음 등차수열의 제 20 항을 구하여라.

131, 137, 143, 149, 155, 161,...

▶ 답 :

▷ 정답 : 245

해설

주어진 등차수열의 제 1 항을 a , 공차를 d 라고 하자.

$a = 131$, $d = 137 - 131 = 6$ 이므로

$a_n = 131 + (n - 1) \cdot 6 = 6n + 125$

$\therefore a_{20} = 6 \cdot 20 + 125 = 245$

4. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

- ① 10, 22, 27
- ② 10, 23, 29
- ③ 11, 23, 27
- ④ 11, 23, 29
- ⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2} = 11$, 이 수열의 공차는 6이다.
따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

5. 세 수 -17 , x , 1 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x 는 -17 과 1 의 등차중항이므로

$$2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore x = -8$$

6. 첫째항이 $\frac{7}{4}$, 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 17항까지의 합은?

- ① $\frac{167}{4}$ ② $\frac{235}{4}$ ③ $\frac{527}{4}$ ④ $\frac{1105}{4}$ ⑤ $\frac{1054}{4}$

해설

$$\text{구하는 합을 } S_{17} = \frac{17 \left\{ 2 \cdot \frac{7}{4} + (17-1) \cdot \frac{3}{4} \right\}}{2} = \frac{527}{4}$$

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합 $S_{10} = 100$ 이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합 $S_{20} = 200$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

S_{10} 은 첫째항부터 제10까지의 합이고, S_{20} 은 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} &= S_{20} - S_{10} \\ &= 200 - 100 = 100 \end{aligned}$$

8. $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축으로 m 만큼 y 축으로 n 만큼 평행이동하면 $y = \sqrt{2x+6} - 2$ 과 일치한다. $n - m$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \sqrt{2x+6} - 2 = \sqrt{2(x+3)} - 2$ 이므로
 $y = \sqrt{2x}$ 를 x 축으로 -3만큼
 y 축으로 -2만큼 평행이동하면 서로 일치한다.
따라서 $m = -3$, $n = -2$ 이므로
 $\therefore n - m = 1$

9. 수열 $-3, a, b, c, 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$$a - (-3) = d$$

$$b - a = d$$

$$c - b = d$$

$$13 - c = d$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

$$\text{더하면 } 13 - (-3) = 4d \therefore d = 4$$

$$\therefore a = -3 + 4 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$

$$c = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

10. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

11. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 + 2n - 1$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$S_{10} = 10^2 + 20 - 1 = 119,$$

$$S_9 = 9^2 + 18 - 1 = 98$$

$$\therefore a_{10} = 119 - 98 = 21$$

12. $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수 중 소수인 수}\}$ 일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하면?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 15 개 ⑤ 32 개

해설

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고, 그중 소수는 2, 3이므로 $A = \{2, 3\}$ 이다.
따라서 A 의 부분집합의 개수는 $2^2 = 4$ (개)이다.

13. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 $A \cup X = A$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하면?

- ① 2개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$A \cup X = A$ 에서 $X \subset A \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $(A \cap B) \subset X \subset A$ 즉, X 는 A 의 부분집합 중에서 $A \cap B$ 를 포함하고 있는 집합이다. $A \cap B = \{4\}$ 이므로 $\{4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 이 조건을 만족시키는 X 를 모두 구하면 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합 중에서 4가 반드시 포함된 것과 같다.
 $\therefore 2^{4-1} = 2^3 = 8(\text{개})$

14. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ 에 대하여, 다음 중 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 를 만족하는 집합 B 는?
- ① $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 홀수}\}$
 - ② $B = \{x \mid x \text{는 } 13 \text{ 이하의 자연수}\}$
 - ③ $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$
 - ④ $B = \{x \mid x \text{는 } 14 \text{보다 작은 홀수}\}$
 - ⑤ $B = \{x \mid x \text{는 } 2 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$

해설

$A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이면, $A = B$ 이다.
따라서 보기 중 집합 A 와 집합 B 가 같은 것을 찾는다.

- ① $B = \{1, 3, 5, \dots, 19\}$
- ② $B = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$
- ③ $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$
- ④ $B = \{1, 3, 5, \dots, 13\}$
- ⑤ $B = \{2, 3, 4, \dots, 15\}$

15. 두 집합 $A = \{2, 5, 9, a\}$, $B = \{3, 7, b+2, b-2\}$ 에 대하여 $A - B = \{2, 8\}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 A 에서 $a = 8$ 이고,

$A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로

(i) $b + 2 = 5$ 일 때, $b = 3$ 이므로

$B = \{1, 3, 5, 7\} \Rightarrow A \cap B = \{5\}$ (×)

(ii) $b - 2 = 5$ 일 때, $b = 7$ 이므로

$B = \{3, 5, 7, 9\} \Rightarrow A \cap B = \{5, 9\}$ (○)

$\therefore a - b = 8 - 7 = 1$

16. 다음 중 옳은 것을 고르면?

- ① $a > 0, b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
- ② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$
- ③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$
- ④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \leq |a| - |b|$
- ⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

- ① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면
 $a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$
 $\Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0$ (참)
- ② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.
- ③ : (반례) $a = 0, b = 0$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \geq 0) \\ x + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(5) + g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$g(5) = a$ 라 하면 $f^{-1}(5) = a$ 에서 $f(a) = 5$
그런데 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $f(a) = a^2 + 1 = 5$
 $\therefore a = 2 (\because a \geq 0) \therefore g(5) = 2$
또, $g(0) = b$ 라 하면 $f^{-1}(0) = b$ 에서 $f(b) = 0$
그런데 $x < 0$ 일 때, $f(x) = x + 1 < 1$ 이므로
 $f(b) = b + 1 = 0$
 $\therefore b = -1 \therefore g(0) = -1$
 $\therefore g(5) + g(0) = 2 - 1 = 1$

18. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(a) = 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $a = -\frac{3}{2}$

② $a = -\frac{5}{2}$

③ $a = -\frac{7}{2}$

④ $a = -\frac{9}{2}$

⑤ $a = -\frac{11}{2}$

해설

$(g^{-1} \circ f)(a) = g^{-1}(f(a)) = 2$ 에서

$f(a) = g(2)$ 이다.

주어진 함수식에 의하여

$$\therefore 2a + 5 = -3 \cdot 2 + 2$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2}$$

19. 직선 $y = m|x - 1| + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$
- ② $\frac{2}{5}$
- ③ $-\frac{1}{5}$
- ④ $-\frac{2}{5}$
- ⑤ 1

해설

$y = m|x - 1| + 2$

i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots \textcircled{1}$

ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots \textcircled{2}$

m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x 절편은 $\textcircled{1}$ 에서 $x = \frac{m-2}{m}$

$\textcircled{2}$ 에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

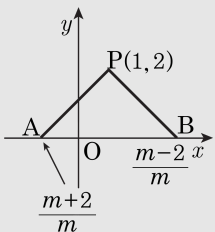
$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = -\frac{4}{m}$

$\therefore \triangle PAB$ 의 면적이 10 이므로

$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$



해설

삼각형의 넓이가 10 일 때 높이가 2이므로

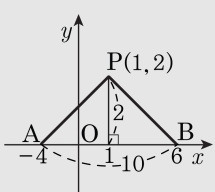
$\overline{AB} = 10$

즉 그래프의 x 절편이 -4, 6이다.

$y = m|x - 1| + 2$ 에 (6, 0)을 대입하면

$0 = m|6 - 1| + 2, 5m = -2$

$\therefore m = -\frac{2}{5}$



20. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

1, 4, 9, 16...

- ① n
- ② $3n - 2$
- ③ $2n + 1$
- ④ n^2
- ⑤ $(n + 1)^2$

해설

$a_1 = 1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = 16 = 4^2, \cdots$
 $\therefore a_n = n^2$

21. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1, a_5 = b_7, b_{22} = 10$ 일 때, $a_k = 10$ 을 만족시키는 양의 정수 k 의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

- ① 12
- ② 14
- ③ 15
- ④ 21
- ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$ 의 공차를 x , $\{b_n\}$ 의 공차를 y 라 하면
 $a_n = a_1 + (n - 1)x$
 $b_n = b_1 + (n - 1)y$
 $a_1 + 4x = b_1 + 6y$
 $\therefore y = \frac{2}{3}x$
 $b_{22} = b_1 + 21y = 10$
 $a_k = a_1 + (k - 1)x = 10$
 $a_1 = b_1$ 이므로 $a_1 = 10 - 21y$
 $10 - 21y + (k - 1)x = 10$
 $y = \frac{2}{3}x$ 이므로
 $10 - 14x + (k - 1)x = 10$
 $-14x + (k - 1)x = 0$
 $(k - 15)x = 0$
(i) $x \neq 0$ 일 때, $k = 15$
(ii) $x = 0$ 일 때 $y = 0$ 이므로 $b_{22} = \cdots = b_1 = 10$
 $b_1 = a_1$ 이므로 $a_1 = 10$
그런데 $a_1 \neq 10$ 이 아니므로
 $x = 0$ 이 될 수 없다.
 $\therefore k = 15$

22. 10행 10열로 이루어진 표에 다음 그림과 같이 1, 3, 4, 6이 쓰여 있다. 이 표의 나머지 칸에는 모든 행과 모든 열이 각각 등차수열을 이루도록 숫자가 쓰인다고 할 때, 이 표에 있는 모든 숫자의 합은?

	제1열	제2열	...	제10열
제1행	1	3		
제2행	4	6		
⋮				
제10행				

- ① 2200 ② 2250 ③ 2300 ④ 2350 ⑤ 2400

해설

제 n 행의 수열의 합을 S_n 이라 하면
제1행은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_1 = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 100, 공차가 $3 \cdot 10 = 30$ 인 등차수열이므로

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = \frac{10(2 \cdot 100 + 9 \cdot 30)}{2} = 2350$$

23. 등차수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 의 합이 2375가 되도록 하는 p, q 의 값은?

- ① $p = 11, q = 3$ ② $p = 12, q = 4$ ③ $p = 15, q = 3$
④ $p = 16, q = 4$ ⑤ $p = 17, q = 5$

해설

(i) 두 수열 $85, x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, 100$ 과 $100, y_1, y_2, \dots, y_q, 105$ 는 공차가 같은 등차수열이므로

$$100 = 85 + (p + 1)d, 105 = 100 + (q + 1)d$$

$$\frac{100 - 85}{p + 1} = \frac{105 - 100}{q + 1}$$

$$15(q + 1) = 5(p + 1) \quad \therefore p = 3q + 2$$

(ii) 주어진 수열은 첫째항이 85, 끝항이 105, 항수가 $p + q + 3$ 인 등차수열이고, 그 합이 2375이므로 $\frac{(p + q + 3)(85 + 105)}{2} = 2375$

$$p + q + 3 = 22 \quad \therefore p + q = 19 \cdots \text{㉠}$$

이때, (i)에서 $p = 3q + 2$ 이므로 이것과 ㉠을 연립하여 풀면 $p = 17, q = 5$

24. 다음과 같이 정의한 집합 A 의 모든 원소를 작은 것부터 차례로 나열하여 수열 $\{a_n\}$ 을 만들었다.
 $A = \{x \mid 2x = 3l - 1, x \text{와 } l \text{은 음이 아닌 정수}\}$
이 수열의 첫째항부터 제 100항까지의 합 S_{100} 은?
- ① 146700 ② 14800 ③ 14950
④ 15000 ⑤ 15100

해설

l 이 음이 아닌 정수이므로 $2k, 2k+1(k \text{는 음이 아닌 정수})$ 의 꼴 중 하나의 꼴로 나타낼 수 있다. 즉, $2x$ 는 $6k-1, 6k+2$ 중 하나의 꼴이다.
그런데 x 는 음이 아닌 정수이므로 우변의 수도 2의 배수가 되어야 한다. 그러므로 l 은 $2k+1$ 의 꼴, 즉, $x = 3k+1(k = 0, 1, \dots)$ 이고 이 수를 작은 수부터 차례로 나열한 것이 수열 $\{a_n\}$ 이다.
수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$S_{100} = \frac{100 \times (1 \times 2 + 99 \times 3)}{2} = 14950$$

25. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $-5 < d < -4$
㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$
㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$
 $S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$
 $10 - 2d + 4d > 0$
 $\therefore d > -5$
 $S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$
 $2(10 - 2d) + 9d < 0$
 $\therefore d < -4$
 $\therefore -5 < d < -4$ (참)
㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$
㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로
 $0 < 10 + 2d < 2$
즉, $0 < a_5 < 2$
 $a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$
 $-15 < 3d < -12$ 이므로
 $-5 < 10 + 3d < -2$
즉, $-5 < a_6 < -2$
 $\therefore a_5 > 0$, $a_6 < 0$ (참)
㉢ $a_1 = 10 - 2d$ 이므로
 $-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$
즉, $18 < a_1 < 20$
 a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$
 $a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\frac{9}{2}$
 $\therefore a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$
 $\therefore a_1 + a_9 = 2 \neq 0$ (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.