1. 등차수열 a_n의 일반항이 $a_n = -2n-2$일 때, 첫째 항 a와 공차 d는?

① $a=-1,\ d=2$　　② $a=-1,\ d=-2$

③ $a=-2,\ d=-2$　　④ $a=-4,\ d=-2$

⑤ $a=-4,\ d=2$

해설

$a_n = -2n-2$이므로

$a_1 = -2\cdot 1-2 = -4$,

$a_2 = -2\cdot 2-2 = -6$이므로

$d = a_2 - a_1 = -2$

2. 제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?

① 60 ② 62 ③ 64 ④ 66 ⑤ 68

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3 = a + 2d = 11 \cdots$ ㉠

$a_9 = a + 8d = 29 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = 5,\ d = 3$

따라서 첫째항이 5, 공차가 3이므로 일반항 a_n은

$a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$

따라서 20번째 항은 $3 \times 20 + 2 = 62$

3. 두 수 48과 2사이에 10개의 수 a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}을 넣어 12개의 수 48, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}, 2가 등차수열을 이루게 하였다. 이때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$의 값은?

① 200　② 250　③ 300　④ 350　⑤ 400

해설

첫째항이 48이고 제 12항이 2인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은 $\frac{12(48+2)}{2} = 300$이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 300 - (48+2) = 300 - 50 = 250$

4. 이차방정식 $x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α, β의 등차중항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$이므로 α,β의 등차중항은 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$

5. 세 수 $5-2x,\ 4-x,\ 6+3x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$5-2x,\ 4-x,\ 6+3x$가 등차수열을 이루면 $4-x$가 등차중항이므로

$4-x=\dfrac{(5-2x)+(6+3x)}{2}$

$2(4-x)=5-2x+6+3x$

$8-2x=11+x$

$-3x=3 \quad \therefore\ x=-1$

6. 수열 a, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, b, $\cdots$ 가 등차수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

해설

공차를 d라 하면 $d=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

7. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120일 때, $a_4 + a_7$의 값은?

① 12　　② 18　　③ 24　　④ 30　　⑤ 36

해설

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합이 120이므로 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 120 \quad \therefore\ 2a+9d=24$

$a_4 + a_7 = (a+3d)+(a+6d) = 2a+9d = 24$

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, a_{15}를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

$n \geq 2$일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

$= \frac{n(n+1)\{n+2-(n-1)\}}{3}$

$= \frac{n(n+1) \cdot 3}{3}$

$= n(n+1)$

$\therefore\ a_{15} = 15 \times 16 = 240$

9. 세 집합 $A = \{x \mid x$는 10의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 32의 약수$\}$, $C = \{x \mid x$는 10이상 20미만의 짝수$\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?(정답 2 개)

① $A \cap B \cap C = \{10\}$

② $A \cup B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 32\}$

③ $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 10\}$

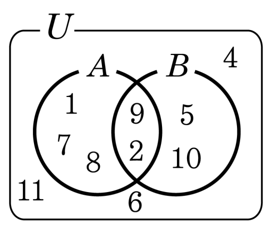
④ $(A \cup B) \cap C = \{10, 12, 16\}$

⑤ $(A \cup B) \cap C = \{10, 16\}$

해설

$A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$, $B = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$, $C = \{10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18\}$이므로
① $A \cap B \cap C = \varnothing$
④ $(A \cup B) \cap C = \{10, 16\}$

10. 다음 벤 다이어그램에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



① $A^C = \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$

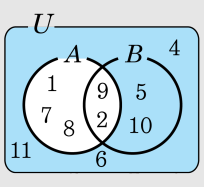
② $B^C = \{1, 4, 6, 7, 8, 11\}$

③ $(A \cap B)^C = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

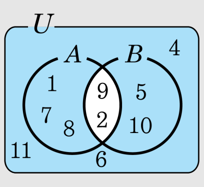
④ $A \cup (A \cup B)^C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

⑤ $A \cap B^C = \{1, 7, 8\}$

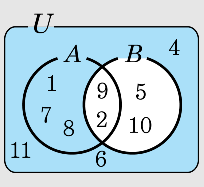
해설

①


$A^C = \{4, 5, 6, 10, 11, 12\}$

③


$(A \cap B)^C = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$

④


$A \cup (A \cup B)^C = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$

따라서 옳은 것은 ②, ⑤이다.

11. 0이 아닌 실수 a에 대하여 $(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a})$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a}) = 144a^2+\frac{1}{a^2}+30 \geq 2\sqrt{144a^2\times\frac{1}{a^2}}+30 = 30+24 = 54$

12. 유리식 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

① $1-a^2$　　② $(1-a)^2$　　③ 1

④ $1+a^2$　　⑤ $(1+a)^2$

해설

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}} = \frac{1}{1-\dfrac{a}{a-1}} = \frac{a-1}{a-1-a}$$

$$= 1-a$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}} = \frac{1}{1-\dfrac{a}{a+1}} = \frac{a+1}{a+1-a}$$

$$= 1+a$$

$\therefore$ (준 식) $= 1-a^2$

13. $(1+\sqrt{2})x = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$, $(1-\sqrt{2})y = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 33

해설

$(1+\sqrt{2})x = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$

$\therefore\ x = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})y = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

$\therefore\ y = \dfrac{\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}+1} = -3-2\sqrt{2}$

$\therefore\ x+y = -4\sqrt{2},\ xy = -1$

$$
\begin{aligned}
x^2+xy+y^2 &= (x+y)^2 - xy \\
&= (-4\sqrt{2})^2 - (-1) = 33
\end{aligned}
$$

14. $a_5 = 27,\ a_{11} = 15$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16} ② a_{17} ③ a_{18} ④ a_{19} ⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 27$
$a_{11} = a + 10d = 15$
연립하여 풀면 $d = -2,\ a = 35$
$\therefore\ a_n = 35 + (n-1)\times(-2) = -2n + 37$
$-2n + 37 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면
$37 < 2n,\quad 18.5 < n$
$\therefore\ n = 19$
$\therefore\ \{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19}이다.

15. 수열 $\log \frac{1000}{3},\ \log \frac{1000}{9},\ \log \frac{1000}{27},\ \log \frac{1000}{81}, \cdots$ 에서 첫째항부터 몇째 항까지의 합이 최대가 되는가? (단, $\log 3 = 0.4771$)

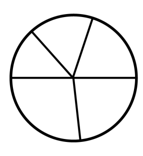
① 제 5항　② 제 6항　③ 제 7항
④ 제 8항　⑤ 제 9항

해설

$$\log \frac{1000}{3} = \log 10^3 - \log 3$$
$$= 3 - \log 3$$
$$\log \frac{1000}{9} = 3 - 2\log 3$$
$$\log \frac{1000}{27} = 3 - 3\log 3$$

이므로 주어진 수열은
$a = 3 - \log 3$
$d = -\log 3$ 인 등차수열
$a_n = (3 - \log 3) + (n-1)\cdot(-\log 3)$
$= 3 - n\cdot\log 3$
그런데 $\log 3 = 0.4771$ 이므로
$a_6 = 3 - 6\log 3 = 0.1374$
$a_7 = 3 - 7\log^3 = -0.3397$
$\therefore$ 6번째 항까지의 합이 최대

16. 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 15 인 원을 5 개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2 배일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$ 이다. 이때 k 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 60

해설

각 부채꼴의 넓이를

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$ 라 하면

$2(a-2d)=a+2d$

$2a-4d=a+2d$

$a=6d$

$\therefore 4d,\ 5d,\ 6d,\ 7d,\ 8d$

그런데 $\frac{5(4d+8d)}{2}=15^2\pi$

$6d=45\pi$

$d=\frac{15}{2}\pi$

$\therefore 8d=8\cdot\frac{15}{2}\pi=60\pi$

$\therefore k=60$

17. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개　② 18 개　③ 20 개　④ 24 개　⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는
$f(1)$: 4 가지
$f(2)$: 3 가지
$f(3)$: 2 가지
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)
그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로
$f(x) \neq x$ 인 것은
$\therefore\ 24 - 6 = 18$ (가지)

18. 두 함수 $y=|x+1|-|x-2|$, $y=mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m의 값을 정할 때, 다음 중 m의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y=|x+1|-|x-2|$ 에서

i) $x<-1$ 일 때

$y=-(x+1)-(-x+2)=-3$

ii) $-1 \le x < 2$ 일 때

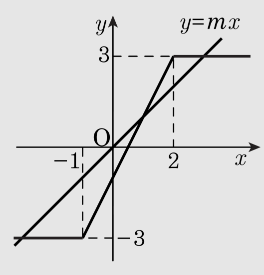
$y=(x+1)-(-x+2)=2x-1$

iii) $x \ge 2$ 일 때

$y=(x+1)-(x-2)=3$

i) ii) iii) 에서 $y=mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0<m<\frac{3}{2}$

따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④ 번이다.



19. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 제 n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 한다. $A_n : B_n = (3n+6) : (7n+2)$일 때, $a_7 : b_7$을 구하면? (단, n은 자연수)

① 5 : 17　　② 15 : 31　　③ 17 : 9

④ 31 : 15　　⑤ 49 : 50

해설

a_n의 일반항을 $a+(n-1)d_1$
b_n의 일반항을 $b+(n-1)d_2$로 놓으면

$A_n = \frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d_1\right\}$,

$B_n = \frac{n}{2}\left\{2b+(n-1)d_2\right\}$

$\frac{2a+d_1n-d_1}{2b+d_2n-d_2} = \frac{3n+6}{7n+2} = \frac{3kn+6k}{7kn+2k}$,

$d_1 = 3k,\ 2a-d_1 = 6k$(k는 비례상수)

따라서 $2a = 9k,\ a = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ a_n = \frac{9}{2}k+(n-1)3k$

$d_2 = 7k,\ 2b-d_2 = 2k,\ b = \frac{9}{2}k$

$\therefore\ b_n = \frac{9}{2}k+(n-1)7k$

$\therefore\ a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k+18k\right) : \left(\frac{9}{2}k+42k\right)$

$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$

20. 첫째항이 3이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 이 수열의 처음 n개의 항의 합이 다음 n개의 항의 합의 $\frac{1}{3}$과 같을 때, d의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면 문제의 조건으로부터

$S_n = \frac{1}{3}(S_{2n} - S_n),\ 3S_n = S_{2n} - S_n$

$\therefore\ S_{2n} = 4S_n$

$\frac{2n\{2 \cdot 3 + (2n-1)d\}}{2} = 4 \cdot \frac{n\{2 \cdot 3 + (n-1)d\}}{2}$

$6 + (2n-1)d = 2\{6 + (n-1)d\}\ (n \neq 0)$

$6 + 2nd - d = 12 + 2nd - 2d$

$\therefore\ d = 6$

21. 12 나 18 로 나누어떨어지지 않는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 439200

해설

구하는 총합을 S 라 하고, 세 자리의 자연수 중에서 12 로 나누어 떨어지는 수의 총합을 S_{12}, 18 로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{18}, 36 으로 나누어떨어지는 수의 총합을 S_{36} 이라고 하면

$S =$ (세 자리의 자연수의 총합)

$- (S_{12} + S_{18} - S_{36})$ 이다.

이때, 세 자리의 자연수의 총합은

$100 + 101 + \cdots + 999 = \dfrac{900(100 + 999)}{2} = 494550$ 이고

$S_{12} = 12 \cdot 9 + 12 \cdot 10 + \cdots + 12 \cdot 83$

$= \dfrac{75(108 + 996)}{2} = 41400$

$S_{18} = 18 \cdot 6 + 18 \cdot 7 + \cdots + 18 \cdot 55$

$= \dfrac{50(108 + 990)}{2} = 27450$

$S_{36} = 36 \cdot 3 + 36 \cdot 4 + \cdots + 36 \cdot 27$

$= \dfrac{25(108 + 972)}{2} = 13500$

이므로 구하는 총합 S 는

$494550 - (41400 + 27450 - 13500) = 439200$