1. $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \}$ 에서 $a_1 \in X$, $a_2 \in X$, $a_5 \notin X$ 를 만족시키는 A 의 부분집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

a_1, a_2 는 속해있고 a_5 는 속해있지 않은 A 의 부분집합은 $\{a_3, a_4, a_6\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-2-1} = 2^3 = 8$ (개)

2. 등차수열 a_n의 일반항이 $a_n = -6n + 7$일 때, 첫째 항 a와 공차 d는?

① $a=-1,\ d=5$ ② $a=-1,\ d=6$ ③ $a=1,\ d=-5$
④ $a=1,\ d=-6$ ⑤ $a=2,\ d=7$

해설

$a_n = -6n + 7$이므로
$a_1 = -6 \cdot 1 + 7 = 1,$
$a_2 = -6 \cdot 2 + 7 = -5$이므로
$d = a_2 - a_1 = -6$

3. 다음 (　　) 안에 알맞은 것은?

$1-2i,\ 2-4i,\ 3-8i,\ 4-16i,\ (\quad),\cdots$

① $5-18i$　② $5-20i$　③ $5-24i$
④ $5-32i$　⑤ $5-64i$

해설

주어진 복소수의 배열을
$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ a_3+b_3i,\ a_4+b_4i,\cdots$ 와 같이 생각한다면
(단, $a_k,\ b_k$는 실수)
수열 $\{a_n\}$의 배열은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ (\quad),\ \cdots$ 이고
수열 $\{b_n\}$의 배열은 $-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ (\quad),\ \cdots$ 이다.
따라서 구하는 것은 다섯 번째 수이므로 $5-32i$이다.

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5+a_6=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$, $a_6+a_7=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 일 때, a_6 의 값은?

① $-\sqrt{3}$　② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ 0　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm1$(복호동순), $a_5+a_7=2a_6$ 이므로
$(a_5+a_6)+(a_6+a_7)=(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)$ 에서
$4a_6=2\sqrt{3}$ $\therefore$ $a_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 등차수열 $10,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{99},\ -390$ 에서 공차는?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$b_1 = 10,\ b_2 = a_1,\ b_3 = a_2,\ \cdots,$
$b_{100} = a_{99},\quad b_{101} = -390$
$\therefore\ b_{101} = 10 + (101-1)\cdot d = -390$
$100d = -400$
$\therefore\ d = -4$

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 13　　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

7. 세 수 $-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$-7+2x,\ 5+x,\ 5-4x$가 등차수열을 이루면 $5+x$가 등차중항이므로

$2(5+x)=-7+2x+5-4x$

$4x=-12$

$\therefore\ x=-3$

8. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$
$b-a=d$
$c-b=d$
$13-c=d$
좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리
더하면 $13-(-3)=4d\ \therefore d=4$
$\therefore a=-3+4=1$
$b=1+4=5$
$c=5+4=9$
$\therefore a+b+c=15$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 72$일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{24}$의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 432

해설

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5 + a_{10} + a_{15} + a_{20} = 4a + 46d = 72$

$2a + 23d = 36$

$$\begin{aligned} \therefore\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} &= \frac{24(2a + 23d)}{2} \\ &= 12 \times 36 \\ &= 432 \end{aligned}$$

10. $\{1\} \subset A \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 를 만족하는 집합 A 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8개

해설

집합 A 는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합이면서 1을 포함하는 집합이므로 $\{2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$2^3 = 8$ (개)

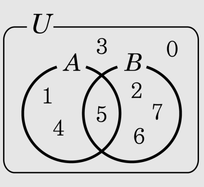
11. 전체집합 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A\cap B=\{5\}$, $(A\cup B)^c=\{0,\ 3\}$, $A-B=\{1,\ 4\}$ 일 때, $n(B-A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$B-A=\{2,\ 6,\ 7\}$ 이므로 $n(B-A)=3$

12. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

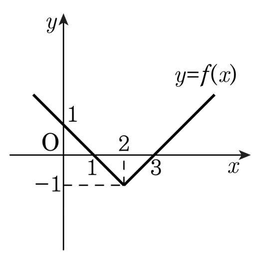
13. 함수 $f(x)=ax+b(a>0)$에 대하여 합성함수 $(f\circ f)(x)=4x+3$일 때 $f(1)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b$
$=a^2x+ab+b$
$a^2x+ab+b=4x+3$
x에 대한 항등식 이므로 $a^2=4, ab+b=3$
$a>0$ 이므로 $a=2, b=1$
$\therefore\ f(x)=2x+1$
$\therefore\ f(1)=3$

14. 함수 $f(x) = |x - 2| - 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(0) = 0$
㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
㉣ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $f(0) = 1$
㉡ $f(1) = 0,\ f(3) = 0$ 이므로
$f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
㉣ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
$a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

15. $\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}$ 이고, $\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, $abc \neq 0$, p, q 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : $p+q=32$

해설

$\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}=k(k\neq 0)$ 로 놓으면

$a=4k$, $b=3k$, $c=2k$

$\therefore \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{11}{21}$

$\therefore$ $p+q=11+21=32$

16. $a_5 = 31$, $a_{11} = 13$인 등차수열 $\{a_n\}$에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}　② a_{17}　③ a_{18}　④ a_{19}　⑤ a_{20}

해설

$a_5 = a + 4d = 31$

$a_{11} = a + 10d = 13$

$6d = -18$

$d = -3$

$\therefore a = 31 + 4 \cdot 3 = 43$

$\therefore a_n = 43 + (n-1) \times (-3)$

$= -3n + 46$

$-3n + 46 < 0$인 정수 n의 최솟값을 구하면

$46 < 3n$

$15.\times\times < n$

$\therefore n = 16$

17. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 -2, 3일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$의 공차는?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 9　　⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라고 할 때,

$$
\begin{aligned}
&3a_n + 5b_n \\
&= 3\{a + (n-1)\times(-2)\} + 5\{b + (n-1)\times 3\} \\
&= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1) \\
&= 3a + 5b + 9(n-1)
\end{aligned}
$$

따라서 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$은 첫째항이 $3a + 5b$이고, 공차가 9인 등차수열이다.

18. 100 이하의 자연수 중에서 3 으로 나누었을 때 나머지가 2 인 수의 합은?

① 1600 ② 1620 ③ 1650 ④ 1680 ⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면
2, 5, 8, $\cdots$, 98 이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열을 이룬다.
이 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 일반항 a_n 은
$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$
이때, 끝항 98 은 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98 은 제 33 항이다.
따라서 구하는 합을 S 라 하면
$S = \dfrac{33(2+98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$

19. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 20이고, 공차는 d인 정수일 때, $a_7 \cdot a_8 < 0$을 만족한다. 이 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_n > 0$을 만족하는 n의 최댓값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$\{a_n\}$이 등차수열이고 첫째항이 양수이므로
$a_7 \cdot a_8 < 0$에서 $a_7 > 0,\ a_8 < 0$
$a_7 = 20 + 6d > 0,\ a_8 = 20 + 7d < 0$
이때 공차 d는 정수이므로 $d = -3$
$S_n > 0$을 만족해야 하므로

$$S_n = \frac{n\{2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3)\}}{2} > 0$$

$n(43 - 3n) > 0,\ n(3n - 43) < 0$

$$\therefore\ 0 < n < \frac{43}{3} = 14.\times\times\times$$

20. 다음을 만족하는 집합 A 의 원소가 될 수 <u>없는</u> 것은?

㉠ 모든 원소는 자연수이다.
㉡ $2 \in A,\ 6 \in A$
㉢ $a+b \in A,\ a \in A,\ b \in A$

① 4　② 5　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

$2 \in A,\ 6 \in A$ 이므로
$2+2=4 \in A,\ 2+6=8 \in A$
$4+6=10 \in A,\ 6+6=12 \in A$

21. $a+b+c \neq 0$, $abc \neq 0$인 세 실수 a, b, c가 $\frac{b+c-a}{3a}=\frac{c+a-b}{3b}=\frac{a+b-c}{3c}$를 만족할 때, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$\frac{b+c-a}{3a}=\frac{c+a-b}{3b}=\frac{a+b-c}{3c}=k$

$b+c-a=3ak \cdots ㉠$

$c+a-b=3bk \cdots ㉡$

$a+b-c=3ck \cdots ㉢$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $a+b+c=3(a+b+c)k$

$a+b+c \neq 0$ 이므로 $k=\frac{1}{3}$

$k=\frac{1}{3}$를 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하여 정리하면

$b+c=2a$, $c+a=2b$, $a+b=2c$

$\therefore \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{8abc}{abc}=8$

22. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5이고, 공차가 4인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$으로 나타내어진다. 이때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 140

해설

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \dfrac{n\left\{2 \cdot 5 + (n-1)4\right\}}{2} = n(2n+3)$

$\therefore\ b_n = \dfrac{n(2n+3)}{n} = 2n+3$(단, $n \neq 0$)

따라서 수열 $\{b_n\}$의 첫째항은 $b_1 = 2+3 = 5$이고, 공차가 $b_2 - b_1 = 7 - 5 = 2$인 등차수열이다.

$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{10} = \dfrac{10(2 \cdot 5 + 9 \cdot 2)}{2} = 140$

23. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + 3n + 1$인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = 221$을 만족하는 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 3n) - \left\{(n-1)^2 + 3(n-1)\right\} = 2n + 2$

(ii) $n = 1$일 때, $a_1 = S_1$이므로 $a_1 = 5$

(i), (ii)에서 $\begin{cases} a_n = 2n + 2 (n \geq 2) \\ a_1 = 5 \end{cases}$

$\therefore\ a_{2n-1} = 2(2n-1) + 2 = 4n\ (n \geq 2)$

$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 + \cdots a_{2n-1}$

$= 5 + \dfrac{(n-1)(8+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$

$2n^2 + 2n + 1 = 221$에서 $n = 10$ 또는 $n = -11$

그런데 $n \geq 1$이므로 $n = 10$

24. 수학자 드 므와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

> 드 므와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 므와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은?

① 197　② 205　③ 214　④ 224　⑤ 235

해설

이 사실을 알게 된 날을 첫째 날로 하여 드 므와브르가 깨어 있는 시간을 수열 $\{a_n\}$이라고 하면 a_n은 $a_1 = 10$(시간)이고 공차가 $-\frac{1}{4}$(시간)인 등차수열이다.

24시간 계속 수면하게 되는 날은 깨어 있는 시간이 0시간이므로

$a_n = 10 - \frac{1}{4}(n-1) = 0$

$\therefore\ n = 41$

$\therefore$ 깨어있는 시간의 합은 $\frac{41(10+0)}{2} = 205$(시간)이다.

25. 한 문제에 10 점인 주관식 세 문제를 50 명의 학생에게 풀도록 하였다. 1 번을 푼 학생이 29 명, 1 번은 풀고 2 번을 풀지 못한 학생이 15 명, 1 번과 2 번을 모두 풀지 못한 학생이 20 명, 3 번을 풀지 못한 학생이 5 명이었다. 이 학생들의 주관식 문제의 평균 점수를 구하여라.(단, 소수 첫째자리까지 구하여라.)

▶ 답 : ______ 점

▷ 정답 : 17.8 점

해설

1, 2, 3 번을 푼 학생들의 집합을 차례로 A, B, C 라고 하면 1 번은 풀고 2 번은 풀지 못한 학생의 집합은 $A \cap B^c$, 1 번과 2 번을 모두 풀지 못한 학생의 집합은 $A^c \cap B^c$, 3 번을 풀지 못한 학생의 집합은 C^c

$n(A) = 29,\ n(A \cap B^c) = 15,\ n(A^c \cap B^c) = 20,\ n(C^c) = 5$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= n(U) - n(A^c \cap B^c) \\ &= 50 - 20 = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(B) &= n(A \cup B) - n(A \cap B^c) \\ &= 30 - 15 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n(C) &= n(U) - n(C^c) \\ &= 50 - 5 = 45 \end{aligned}$$

따라서 구하는 평균 점수는

$$\frac{10 \times n(A) + 10 \times n(B) + 10 \times n(C)}{n}$$

$$= \frac{10 \times 29 + 10 \times 15 + 10 \times 45}{50}$$

$$= 17.8$$