

1. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2 \\ & \sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2 \\ & \text{따라서 주어진 식의 최솟값은 } 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

2. 등차수열 a_n 의 일반항이 $a_n = 3n + 2$ 일 때, 첫째 항 a 와 공차 d 는?

① $a = -5, d = -3$

② $a = -5, d = 3$

③ $a = 5, d = -3$

④ $a = 5, d = 3$

⑤ $a = 5, d = 8$

해설

$$a_n = 3n + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5,$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \text{ 이므로}$$

$$d = a_2 - a_1 = 3$$

3. 다음 등차수열의 제 20 항을 구하여라.

131, 137, 143, 149, 155, 161,...

▶ 답 :

▷ 정답 : 245

해설

주어진 등차수열의 제 1 항을 a , 공차를 d 라고 하자.

$a = 131$, $d = 137 - 131 = 6$ 이므로

$a_n = 131 + (n - 1) \cdot 6 = 6n + 125$

$\therefore a_{20} = 6 \cdot 20 + 125 = 245$

4. 다음 수열이 등차수열을 이루도록 (가)~(다)에 들어갈 알맞은 수를 순서대로 나열한 것은?

보기

5, (가), 17, (나), (다)

- ① 10, 22, 27
- ② 10, 23, 29
- ③ 11, 23, 27
- ④ 11, 23, 29
- ⑤ 12, 24, 29

해설

5와 17의 등차중항은 $\frac{5+17}{2} = 11$, 이 수열의 공차는 6이다.
따라서 (가), (나), (다)에 들어갈 수는 11, 23, 29이다.

5. 세 수 -17 , x , 1 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x 는 -17 과 1 의 등차중항이므로

$$2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore x = -8$$

6. 첫째항이 -4 , 공차가 3 인 등차수열의 첫째항부터 제 17 항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 340

해설

$$S_{17} = \frac{17 \{ 2 \cdot (-4) + (17 - 1) \cdot 3 \}}{2} = \frac{680}{2} = 340$$

7. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합 $S_{10} = 100$ 이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합 $S_{20} = 200$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

S_{10} 은 첫째항부터 제10까지의 합이고, S_{20} 은 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} &= S_{20} - S_{10} \\ &= 200 - 100 = 100 \end{aligned}$$

8. $a, -6, b, -12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

b 는 -6 과 -12 의 등차중항이므로

$$b = \frac{-6 + (-12)}{2} = -9$$

따라서 이 수열은 공차가 -3 인 등차수열이다.

$$a + (-3) = -6 \text{에서 } a = -3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-9}{-3} = 3$$

9. 첫째항이 -43 , 공차가 7 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

- ① 제 8항 ② 제 9항 ③ 제 10항
④ 제 11항 ⑤ 제 12항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -43 + (n-1) \times 7 = 7n - 50$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$7n - 50 > 0, \quad 7n > 50$$

$$\therefore n > \frac{50}{7} = 7.14 \cdots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제8항이다.

10. $n(\varnothing) + n(\{0\}) + n(\{\varnothing\})$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$n(\varnothing) = 0, n(\{0\}) = 1, n(\{\varnothing\}) = 1$$

$$n(\varnothing) + n(\{0\}) + n(\{\varnothing\}) = 2$$

11. $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 자연수}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $C \subset A \subset B$

② $A \subset B \subset C$

③ $B \subset A \subset C$

④ $C \subset B \subset A$

⑤ $A \subset C \subset B$

해설

$A = \{1, 3, 5, \dots\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, \dots\}$

따라서 ③ $B \subset A \subset C$

12. 두 집합 $A = \{3, a+1, 6, 9\}$, $B = \{3, 5, 6, b+2\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \supset A$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$b+2=9$, $a+1=5$ 이므로 $a=4$, $b=7$
따라서 $a+b=11$ 이다.

13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 60$, $n(A) = 36$, $n(A \cap B) = 11$, $n(A^c \cap B^c) = 14$ 일 때, $n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned}n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) = 14, \\n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) = 60 - 14 = 46, \\n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\46 &= 36 + n(B) - 11 \\ \therefore n(B) &= 21\end{aligned}$$

14. 두 조건 $p: |x-1| \leq k$, $q: |x+2| \leq 10$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 충분조건이다. 상수 k 의 최댓값은? (단, $k \geq 0$ 이다.)

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

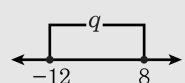
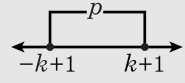
해설

$$p: |x-1| \leq k \Rightarrow -k \leq x-1 \leq k$$

$$\Rightarrow -k+1 \leq x \leq k+1$$

$$q: |x+2| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x+2 \leq 10$$

$$\Rightarrow -12 \leq x \leq 8$$



$$p \subset q \text{ 이므로 } -k+1 \geq -12, k+1 \leq 8$$

$$\therefore k \text{의 최댓값: } 7$$

15. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = 1 - x^2$

㉡ $g(x) = 3x - 2$

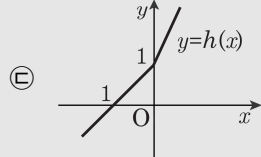
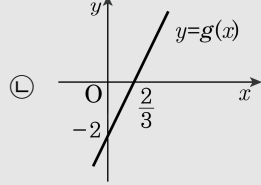
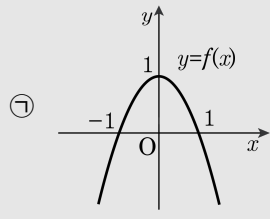
㉢ $h(x) = |x| + 2x + 1$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉢에서 $x \geq 0$ 일 때 $h(x) = 3x + 1$ 이고, $x < 0$ 일 때 $h(x) = x + 1$ 이므로

㉠, ㉡, ㉢의 세 함수의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



따라서 보기 중 일대일 대응인 것은 ㉡, ㉢이다.

16. 직선 $y = m|x - 1| + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

해설

$y = m|x - 1| + 2$
i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots \textcircled{1}$
ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots \textcircled{2}$
 m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x 절편은 $\textcircled{1}$ 에서 $x = \frac{m-2}{m}$

$\textcircled{2}$ 에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

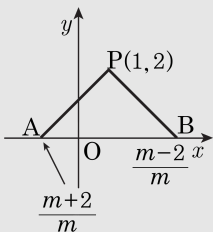
$$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = -\frac{4}{m}$$

$\therefore \triangle PAB$ 의 면적이 10이므로

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$$

$$10m = -4$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



해설

삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

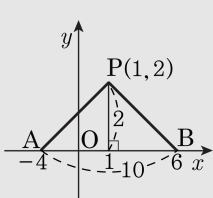
$$\overline{AB} = 10$$

즉 그래프의 x 절편이 -4, 6이다.

$y = m|x - 1| + 2$ 에 (6, 0)을 대입하면

$$0 = m|6 - 1| + 2, 5m = -2$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



17. $a + \frac{1}{b} = c$, $b + \frac{1}{c} = d$, $c + \frac{1}{d} = a$ 일 때, ab 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$c = a + \frac{1}{b}$ 을 $b + \frac{1}{c} = d$ 에 대입하면

$$d = b + \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = b + \frac{b}{ab + 1} = \frac{ab^2 + 2b}{ab + 1}$$

c 와 d 를 $a = c + \frac{1}{d}$ 에 대입하면

$$a = a + \frac{1}{b} + \frac{ab + 1}{ab^2 + 2b} \text{ 에서 } \frac{ab + 2 + ab + 1}{ab^2 + 2b} = 0$$

$$\therefore \frac{2ab + 3}{ab^2 + 2b} = 0$$

따라서 $2ab + 3 = 0$ 이므로 $ab = -\frac{3}{2}$

18. x, y 는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}} \text{ 이 성립하므로 } y < 0, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2} \\ &= |y-x| + x-y - 2|y| \\ &= -y+x+x-y+2y=2x \end{aligned}$$

19. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

1, 4, 9, 16...

- ① n
- ② $3n - 2$
- ③ $2n + 1$
- ④ n^2
- ⑤ $(n + 1)^2$

해설

$a_1 = 1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = 16 = 4^2, \cdots$
 $\therefore a_n = n^2$

21. 50과 100 사이의 자연수 중 3의 배수의 총합은?

- ① 1176 ② 1200 ③ 1225 ④ 1275 ⑤ 1300

해설

50 ~ 100사이의 3의 배수는
51에서 시작하여 99로 끝나는
공차가 3인 등차수열이므로

$$\frac{(33 - 17 + 1)(51 + 99)}{2}$$

$$= \frac{17 \cdot 150}{2} = 1275$$

22. 10행 10열로 이루어진 표에 다음 그림과 같이 1, 3, 4, 6이 쓰여 있다. 이 표의 나머지 칸에는 모든 행과 모든 열이 각각 등차수열을 이루도록 숫자가 쓰인다고 할 때, 이 표에 있는 모든 숫자의 합은?

	제1열	제2열	...	제10열
제1행	1	3		
제2행	4	6		
⋮				
제10행				

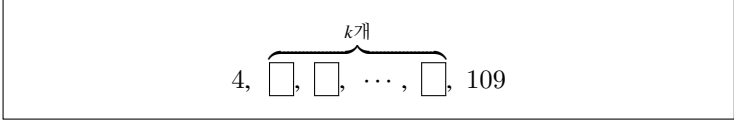
- ① 2200 ② 2250 ③ 2300 ④ 2350 ⑤ 2400

해설

제 n 행의 수열의 합을 S_n 이라 하면
제1행은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로
$$S_1 = \frac{10(2 \cdot 1 + 9 \cdot 2)}{2} = 100$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 100, 공차가 $3 \cdot 10 = 30$ 인 등차수열이므로
$$S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = \frac{10(2 \cdot 100 + 9 \cdot 30)}{2} = 2350$$

23. 다음과 같이 4와 109 사이에 k 개의 수를 나열하여 항의 개수가 $k+2$ 인 등차수열을 만들려고 한다. 공차가 1이 아닌 최소의 자연수일 때, k 의 값은?



- ① 26
- ② 28
- ③ 30
- ④ 32
- ⑤ 34

해설

$a_1 = 4$

$a_{k+2} = 4 + (k + 1) \times d = 109$

$4 + (k + 1) \times d = 109$

$(k + 1) \times d = 105$

$(k + 1) \times d = 3 \cdot 5 \cdot 7$

$\therefore d = 3, k + 1 = 35 \therefore k = 34$

24. 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 10$ 이고 $S_9 > 0$, $S_{10} < 0$ 일 때, 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $-5 < d < -4$
㉡ $a_5 > 0$, $a_6 < 0$
㉢ a_1 이 정수이면 $a_1 + a_9 = 0$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $a_3 = a_1 + 2d = 10$ 에서 $a_1 = 10 - 2d$
 $S_9 = \frac{9(2a_1 + 8d)}{2} > 0$ 에서 $a_1 + 4d > 0$
 $10 - 2d + 4d > 0$
 $\therefore d > -5$
 $S_{10} = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} < 0$ 에서 $2a_1 + 9d < 0$
 $2(10 - 2d) + 9d < 0$
 $\therefore d < -4$
 $\therefore -5 < d < -4$ (참)
㉡ $a_5 = a_3 + 2d = 10 + 2d$
㉠에서 $-10 < 2d < -8$ 이므로
 $0 < 10 + 2d < 2$
즉, $0 < a_5 < 2$
 $a_6 = a_3 + 3d = 10 + 3d$
 $-15 < 3d < -12$ 이므로
 $-5 < 10 + 3d < -2$
즉, $-5 < a_6 < -2$
 $\therefore a_5 > 0$, $a_6 < 0$ (참)
㉢ $a_1 = 10 - 2d$ 이므로
 $-5 < d < -4$ 에서 $18 < 10 - 2d < 20$
즉, $18 < a_1 < 20$
 a_1 이 정수이므로 $a_1 = 19$
 $a_1 + 2d = 10$ 에서 $d = -\frac{9}{2}$
 $\therefore a_9 = 19 + 8 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -17$
 $\therefore a_1 + a_9 = 2 \neq 0$ (거짓)
따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡이다.

25. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫 항부터 제 n 항까지의 합이 각각 $S_n = 2n^2 + pn$, $T_n = qn^2 + 5n$ 이다. 두 수열의 공차의 합이 0이고 두 수열의 제5항이 서로 같을 때, $p + q$ 의 값은?

- ① -43 ② -33 ③ -23 ④ -13 ⑤ -3

해설

$a_1 = 2 + p$ 이고
 $n \geq 2$ 일 때,
 $a_n = S_n - S_{n-1}$
 $= (2n^2 + pn) - \{2(n-1)^2 + p(n-1)\}$
 $= 4n + p - 2$
 $a_n = 4n + p - 2$ 에 $n = 1$ 을 대입하면
 $a_1 = p + 1$ 이므로 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
 $b_1 = q + 5$ 이고
 $n \geq 2$ 일 때,
 $b_n = T_n - T_{n-1}$
 $= (qn^2 + 5n) - \{q(n-1)^2 + 5(n-1)\}$
 $= 2qn + 5 - q$
 $b_n = 2qn + 5 - q$ 에 $n = 1$ 을 대입하면
 $b_1 = 5 + q$ 이므로 $\{b_n\}$ 은 첫째항부터
등차수열을 이룬다.
 $\{a_n\}$ 의 공차는 4,
 $\{b_n\}$ 의 공차는 $2q$ 이므로 $q = -2$
 $a_5 = p + 18$, $b_5 = 5 + 9q$
 $p + 18 = 5 + 9q$, $\therefore p = -31$
 $\therefore p + q = -31 - 2 = -33$