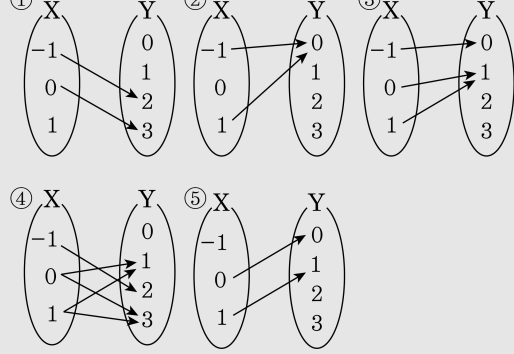


1.  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다.  $X$ 의 임의의 원소  $x$ 에 대하여 다음과 같은  $X$ 에서  $Y$ 로의 대응을 생각할 때, 이 중  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수인 것은?
- ①  $x \rightarrow x + 3$
- ②  $x \rightarrow x^2 - 1$
- ③  $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$
- ④  $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$
- ⑤  $x \rightarrow x^3$

**해설**

$X$ 에서  $Y$ 로의 함수가 되려면  $X$ 의 원소가 빠짐없이  $Y$ 의 원소 하나에 대응해야 한다.

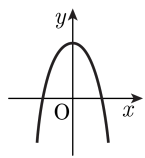
순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



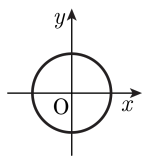
①, ②, ⑤는  $Y$ 의 원소에 대응하지 않는  $X$ 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는  $X$ 의 원소 하나가  $Y$ 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

2. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

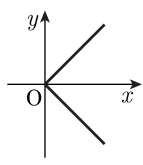
①



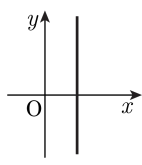
②



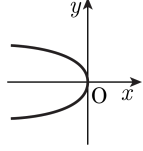
③



④



⑤



해설

함수는 하나의  $x$ 값에 여러 개의  $y$ 값이 대응될 수 없다.

3. 집합  $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$ 를  $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수  $f$ 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개      ② 4개      ③ 6개      ④ 8개      ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 2$ 이므로 함수  $f$ 의 치역은  $\{0, 1, 2\}$ 이다.  
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은  $2^3 = 8$ (개)이다.

4. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합  $X$ 를 정의역으로 하는 두 함수  $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$ ,  $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합  $X$ 의 개수는 몇 개인가?

① 0개      ② 1개      ③ 2개      ④ 3개      ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$  이므로  
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서  
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$ ,  $3(x^2 - 4x - 5) = 0$   
 $(x - 5)(x + 1) = 0$   
 $\therefore x = 5, -1$   
즉,  $x = 5$  또는  $x = -1$  일 때  $f(x) = g(x)$  이다.  
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

5. 두 집합  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$  중에서  $X$ 의 임의의 두 원소  $x_1, x_2$ 에 대하여  $x_1 \neq x_2$ 일 때,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

- ① 15개                      ② 60개                      ③ 120개  
④ 125개                      ⑤ 243개

해설

「 $x_1 \neq x_2$ 일 때,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」는 일대일 함수를 의미한다.

즉,  $X = \{1, 2, 3\}$ 이고

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로

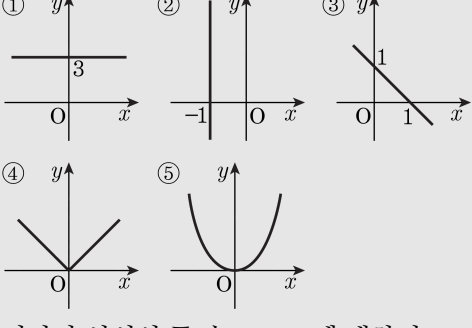
일대일 함수는  $5 \times 4 \times 3 = 60$ (개)

6. 다음 함수 중에서 일대일 대응인 것을 고르면?

- ①  $y = 3$
- ②  $x = -1$
- ③  $y = -x + 1$
- ④  $y = |x|$
- ⑤  $y = x^2$

해설

주어진 함수의 그래프를 살펴보면 다음과 같다.



여기서 임의의 두 수  $x_1, x_2$  에 대하여  $x_1 \neq x_2$  이면  $f(x_1) \neq f(x_2)$  을 만족하는 함수를 찾으면 된다. 따라서 만족하는 함수는 ③이다.

7. 집합  $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $A$ 로의 함수  $f$  중에서  $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

① 2개      ② 3개      ③ 4개      ④ 6개      ⑤ 9개

해설

역함수  $f^{-1}$ 가 존재하므로,  $f$ 는 일대일대응이다.

( i )  $f(1) = 1$  일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$  또는  $f(2) = 3, f(3) = 2$

( ii )  $f(1) = 2$  일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$  이므로  $f(3) = 3$

(iii)  $f(1) = 3$  일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$  이므로  $f(2) = 2$

( i ), ( ii ), (iii)에서 함수  $f$ 의 개수는 4개이다.

8. 함수  $f(x) = 2x + 6$ ,  $g(x) = ax - 1$ 에 대하여  $f \circ g = g \circ f$ 일 때,  $a$ 의 값은?

①  $\frac{1}{6}$

②  $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(f \circ g)(x) = 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ = 2ax + 4 \cdots \textcircled{A}$$

$$(g \circ f)(x) = af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ = 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

9. 함수  $f(x) = ax + 3$ 과 그 역함수  $f^{-1}(x)$ 가 같아지도록 하는 상수  $a$ 의 값은 얼마인가?

- ①  $-3$       ②  $-1$       ③  $-\frac{1}{3}$       ④  $1$       ⑤  $3$

해설

$y = ax + 3$ 으로 놓고  $x, y$ 를 서로 바꾸면  
 $x = ay + 3, y = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$   
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$   
 $f(x) = f^{-1}(x)$ 에서  
 $ax + 3 = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$   
위의 식이 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립해야 하므로  
 $a = \frac{1}{a}, 3 = -\frac{3}{a}$   
 $\therefore a = -1$

해설

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이면  $(f \circ f)(x)$ 이므로  
 $(f \circ f)(x) = I(x) = x$ 가 성립한다.  
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3) = a(ax + 3) + 3$   
 $= a^2x + 3a + 3$   
 $a^2x + 3a + 3 = x$ 에서  $a^2 = 1, 3a + 3 = 0$   
 $\therefore a = -1$

10. 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

①  $(f^{-1})^{-1} = f$

②  $g \circ f \neq f \circ g$

③  $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

④  $f \circ f^{-1} = I$

⑤  $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

해설

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$

즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

11. 함수  $y = -|x + 1| + 3$  의 최댓값을 구하면?

① 1

② 2

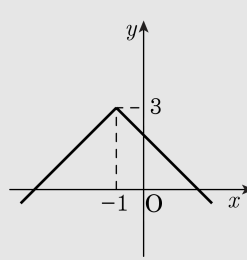
③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$y = -|x + 1| + 3$  의 그래프는 다음  
그림과 같으므로 최댓값은  
 $x = -1$  일 때, 3이다.



12. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$ 를  $f(x) = (x^2 \text{을 } 3 \text{으로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 함수  $f$ 의 치역을 구하면?

- ①  $\{0\}$                       ②  $\{1\}$                       ③  $\{0, 1\}$   
④  $\{1, 2\}$                       ⑤  $\{0, 1, 2\}$

해설

모든 정수는  $3k, 3k+1, 3k+2$  ( $k$ 는 정수)의 세 가지 중 하나의 꼴로 나타낼 수 있다.

( i )  $x = 3k$  일 때  $x^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$

$\therefore f(x) = 0$

( ii )  $x = 3k+1$  일 때  $x^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$

$\therefore f(x) = 1$

( iii )  $x = 3k+2$  일 때  $x^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$

$\therefore f(x) = 1$

따라서 임의의 정수  $x$ 에 대하여  $x^2$ 을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이므로 구하는 치역은  $\{0, 1\}$ 이다.

13. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠  $f(x) = x - 2, g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$   
㉡  $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$   
㉢ 정의역이  $X = \{-1, 1, 2\}$  일 때,  
 $f(x) = x^3, g(x) = 2x^2 + x - 2$

- ① ㉠                      ② ㉡                      ③ ㉢                      ④ ㉠, ㉡                      ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠은  $x = 2$  에서 다른 함수이나  
㉡, ㉢은 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

14. 정의역이  $\{-1, 0, 1\}$ 인 두 함수  $f(x) = -|x|$ ,  $g(x) = -x^2$ 의 관계는?

- ① 두 함수는 상등이다.                      ② 두 함수는 상등이 아니다.  
③  $\{y|y = f(x)\} \subset \{y|y = g(x)\}$       ④  $\{y|y = f(x)\} \supset \{y|y = f(g)\}$   
⑤  $f(x) + g(x) = 0$

해설

$f(-1) = g(-1) = -1$   $f(0) = g(0) = 0$   
 $f(1) = g(1) = -1$   
따라서 두 함수는 상등이다.

15. 정의역이  $\{0, 1\}$ 인 두 함수  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여  $f = g$  일 때,  $a - b$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 함수  $f, g$ 가 서로 같으므로

정의역의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $f(x) = g(x)$ 이다.

즉,  $f(0) = g(0)$ ,  $f(1) = g(1)$ 이므로

$f(0) = b$ ,  $g(0) = 1$ 에서  $b = 1$

$f(1) = 1 + a + b$ ,  $g(1) = 3$ 에서  $a + b = 2$

$\therefore a = 1$

$\therefore a - b = 0$

16. 두 집합  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $B$ 로의 함수  $f$ 가  $x \in A$ 인 모든  $x$ 에 대하여  $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수  $f$ 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개      ② 2 개      ③ 3 개      ④ 4 개      ⑤ 5 개

해설

집합  $A$ 에서  $B$ 로의 함수  $f$ 가  
 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면  
 $-1$ 이 대응할 수 있는 원소는  
 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지.  
 $0$ 이 대응할 수 있는 원소는  
 $f(-0) = -f(0)$ 에서,  $2f(0) = 0$ ,  
즉  $0$ 의 1가지  
 $1$ 이 대응할 수 있는 원소는  $-f(-1)$ 의 1가지  
따라서, 함수  $f$ 의 개수는  $5 \times 1 \times 1 = 5$  (개)

17. 세 함수  $f(x) = x + 1$ ,  $g(x) = -x + a$ ,  $h(x) = bx + 2$  가  $h \circ f = g$  를 만족시킬 때,  $a + b$  의 값은 얼마인가?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x + 1) = b(x + 1) + 2 = bx + b + 2$$

$$g(x) = -x + a \text{ 이므로, } bx + b + 2 = -x + a$$

$$b = -1, b + 2 = a$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 0$$

18. 실수에서 정의된 함수  $f(x)$  가 다음과 같을 때,  $(f \circ f)(x)$  의 값은 얼마인가?

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{가 유리수일 때}) \\ 3-x & (x \text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

- ①  $x$       ②  $3-x$       ③  $x-3$       ④  $0$       ⑤  $3$

해설

- ( i )  $x$ 가 유리수일 때,  $f(x) = x$  이므로,  
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$   
( ii )  $x$ 가 무리수일 때,  
 $f(x) = 3-x$  로 무리수이므로,  
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (3-x) = x$   
( i ), ( ii ) 에 의하여  $(f \circ f)(x) = x$

19.  $f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x$  일 때,  $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f\left(\frac{2x}{-x+2}\right) = x^2 - 3x$  일 때

$\frac{2x}{-x+2} = 2$  에서  $2x = 2(-x+2)$  ,  $2x = -2x+4$

$\therefore x = 1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f\left(\frac{2}{-1+2}\right) = 1 - 3$

$\therefore f(2) = -2$

20. 두 함수  $f(x) = 2x - 5, g(x) = -6x + 2$  에 대하여  $(k \circ f)(x) = g(x)$  를 만족하는 함수  $k(x)$  를 구하면?

①  $-3x + 17$

②  $-3x - 13$

③  $-3x + 13$

④  $-3x$

⑤  $-5x + 10$

해설

$$(k \circ f)(x) = g(x)$$

$$(k \circ f \circ f^{-1})(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$k(x) = (g \circ f^{-1})(x)$$

$$f(x) = 2x - 5 \text{ 에서}$$

$$y = 2x - 5, \frac{y+5}{2} = x$$

$$x = \frac{y}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(x) = -6\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) + 2 = -3x - 13$$

21. 함수  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$  에 대하여 함수  $g(x)$  가  $(g \circ f)(x) = x^2 - x + 3$  을 만족할 때,  $g(x)$  를 구하면?

①  $g(x) = 2x^2 - 12x + 15$

②  $g(x) = -2x^2 + 12x + 15$

③  $g(x) = 2x^2 - 14x + 15$

④  $g(x) = -4x^2 + 14x + 15$

⑤  $g(x) = 4x^2 - 14x + 15$

해설

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = x^2 - x + 3$$

$$-\frac{1}{2}x + 2 = t \text{ 라 하면 } x = -2t + 4$$

$$\therefore g(t) = (-2t + 4)^2 - (-2t + 4) + 3 = 4t^2 - 14t + 15$$

$$\therefore g(x) = 4x^2 - 14x + 15$$

22.  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  일 때,  $g(f(x)) = x$ 가 되는 함수  $g(x)$ 는?

- ①  $1-x$       ②  $\frac{1}{1-x}$       ③  $\frac{x}{x-1}$       ④  $\frac{x-1}{x}$       ⑤  $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ 일 때}$$

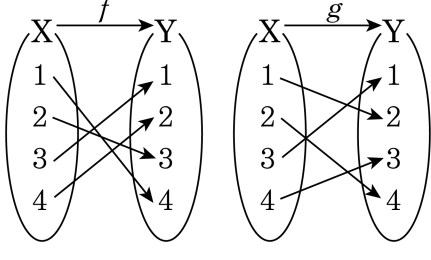
$$g(f(x)) = x \text{ 에서 } f(x) = t \text{로 놓으면}$$

$$\frac{1}{1-x} = t \text{ 에서 } (1-x)t = 1, t - xt = 1$$

$$xt = t - 1, x = \frac{t-1}{t} \text{ 이므로 } g(t) = \frac{t-1}{t}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x-1}{x}$$

23. 두 함수  $f, g$  가 아래 그림과 같이 정의될 때,  $g = h \cdot f$  를 만족시키는 함수  $h$  에 대하여  $h(2)$  의 값은?

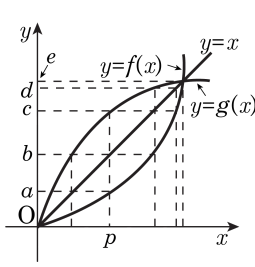


- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$  이고 함수  $f$  는 일대일대응이므로  
 역함수가 존재한다.  
 $\therefore g \cdot f^{-1}$   
 $= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$   
 $= h \cdot I = h$   
 $\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$   
 $= g(f^{-1}(2))$   
 $= g(4)(\because f^{-1}(2) = 4)$   
 $\therefore g(4) = 3$

24. 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,  $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은  $x$ 축 또는  $y$ 축에 평행하다.)
- ①  $a$       ②  $b$       ③  $c$   
④  $d$       ⑤  $e$



해설

주어진 그림에서  $g(p) = c, f(c) = b$   
 $\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

25. 두 집합  $X = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ,  $Y = \{y \mid a \leq y \leq b\}$  에서  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = 3x - 1$  의 역함수  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  가 존재할 때, 실수  $a + b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

함수  $f(x)$  는 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다. 따라서  
함수  $f(x)$  는 점  $(0, a)$ ,  $(2, b)$ 를 지나야 한다.

$$a = f(0) = -1, b = f(2) = 5$$

$$\therefore a + b = 4$$

26.  $f^{-1}(x) = \frac{2}{x+1}$  일 때, 역함수의 성질을 이용하여 다음 함수를 구하면?

$(g \circ f)(x) = \frac{2x-1}{x}$  을 만족하는 함수  $g(x)$

- ①  $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

②  $g(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

③  $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$

④  $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{5}$

⑤  $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

해설

$$p(x) = \frac{2x-1}{x} \text{로 놓으면 } g \circ f = p \text{ 이므로}$$
$$(g \circ f) \circ f^{-1} = p \circ f^{-1} \quad \therefore g = p \circ f^{-1}$$
$$\therefore g(x) = (p \circ f^{-1})(x)$$
$$= p(f^{-1}(x)) = p\left(\frac{2}{x+1}\right)$$
$$= \frac{2 \cdot \frac{2}{x+1} - 1}{\frac{2}{x+1}}$$
$$= \frac{\frac{x+1}{4-(x+1)}}{\frac{x+1}{2}}$$
$$= \frac{\frac{x+1}{-x+3}}{\frac{x+1}{2}} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

27.  $f : R \rightarrow R, f(x) = x|x|+a$ 에서  $f^{-1}(2) = -1$  일 때,  $(f^{-1} \cdot f^{-1})(2)$ 의 값은?(단,  $f^{-1}$  는  $f$  의 역함수)

- ①  $-3$       ②  $-2$       ③  $-1$       ④  $0$       ⑤  $1$

해설

$f^{-1}(2) = -1$  에서  $f(-1) = 2$  이므로

$$-1 + a = 2$$

$$\therefore a = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & (x \geq 0) \\ -x^2 + 3 & (x < 0) \end{cases}$$

$(f^{-1} \cdot f^{-1})(2) = f^{-1}(-1) = k$  라 하면

$$f(k) = -1 \text{ 이므로 } k < 0$$

$$\therefore -k^2 + 3 = -1$$

$$\therefore k^2 = 4$$

$$\therefore k = -2$$

28.  $f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ x^2 & (x > 0) \end{cases}$ ,  $g(x) = f(x+4)$  로 정의한다.  $h(x) = g^{-1}(x)$  라 할 때,  $h(0)$  의 값은 ?

① -4      ② -2      ③ 0      ④ 2      ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} h(0) &= g^{-1}(0) = k \\ g(k) &= f(k+4) = 0 \\ \therefore k+4 &= 0 \\ \therefore k &= -4 \\ \therefore h(0) &= -4 \end{aligned}$$

29. 두 함수  $f(x) = -2x + 3$ ,  $g(x) = 3x + 1$  에 대하여  $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$  의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= (f^{-1} \circ f^{-1})(5) \\ &= f^{-1} \circ (f^{-1}(5)) \\ f^{-1}(5) &= k \text{ 로 놓으면 } f(k) = -2k + 3 = 5 \\ \therefore k &= -1 \\ \therefore (\text{준식}) &= f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1) \\ f^{-1}(-1) &= l \text{ 로 놓으면} \\ f(l) &= -2l + 3 = -1 \\ \therefore l &= 2 \\ \therefore (\text{준식}) &= f^{-1}(-1) = l = 2 \end{aligned}$$

30. 다음의 함수  $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ 와  $g(x) = -2x + 2$ 에 대한 설명 중 옳은 것은 무엇인가?
- ①  $f(x)$ 와  $g(x)$ 는  $y = x$ 에 대해 대칭이다.
  - ②  $(g \circ g)(x) = 4x + 16$
  - ③  $(f^{-1} \circ g)(x) = -4x + 12$
  - ④  $((g \circ f)^{-1} \circ g)(x) = 2x + 6$
  - ⑤  $(f \circ (g \circ f)^{-1})(x) = -2x + 2$

해설

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= 2x + 6, \quad g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \\ g(g(x)) &= 4x - 2 \\ \text{④에서 } ((g \circ f)^{-1} \circ g)(x) \\ &= (f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(x) \\ &= f^{-1}(x) = 2x + 6 \end{aligned}$$

31.  $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고,  $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수  $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수  $a$ 의 값을 하면?

① 3                      ② 5                      ③ 6                      ④ 7                      ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$  또는  $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로  $x \geq 7$ 을 만족하는  $x$ 의 최솟값이  $a$ 가 된다.

$\therefore a = 7$

32. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$  에 대하여  $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1$  이다.  $f\left(\frac{4-x}{3}\right) = ax + b$  일 때, 두 상수  $a, b$  의 곱  $ab$  의 값은?

① -36      ② -20      ③ -4      ④ 20      ⑤ 36

해설

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 6x - 1 \text{ 에서 } \frac{x+1}{2} = t \text{ 라고 하면 } x = 2t - 1 \text{ 이므로}$$

$$f(t) = 6(2t - 1) - 1 = 12t - 7 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

①에  $t$  대신에  $\frac{4-x}{3}$  를 대입하면

$$f\left(\frac{4-x}{3}\right) = 12\left(\frac{4-x}{3}\right) - 7 = 16 - 4x - 7 = -4x + 9$$

$$\therefore ab = (-4) \cdot 9 = -36$$

33. 함수  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  에 대하여  $f(x)$  를 20 번 합성한 함수의  $(f \circ f \circ \dots \circ f)\left(\frac{1}{10}\right)$  의 값은?

- ①  $\frac{1}{200}$       ②  $\frac{1}{100}$       ③  $\frac{1}{30}$       ④  $\frac{1}{20}$       ⑤  $\frac{1}{10}$

해설

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \text{ 이므로}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{1+x}}{1 + \frac{x}{1+x}}$$

$$= \frac{x}{1+2x}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{1+2x}}{1 + \frac{x}{1+2x}}$$

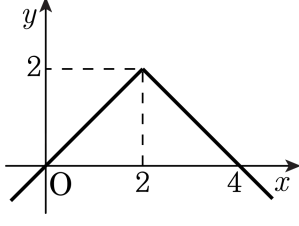
$$= \frac{x}{1+3x}$$

$\vdots$

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n\text{개}} f(x) = \frac{x}{1+nx}$$

$$\therefore \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{20\text{개}} f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\frac{1}{10}}{1 + 20 \cdot \frac{1}{10}} = \frac{1}{30}$$

34.  $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식  $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



- ① 1 개

② 2 개

③ 3 개
- ④ 4 개

⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \leq 2) & \cdots \textcircled{\text{㉠}} \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots \textcircled{\text{㉡}} \end{cases}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}\text{에서는 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$$

$$\therefore x = 1$$

$$\textcircled{\text{㉡}}\text{에서는 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 4)$$

$$= -x + 4$$

$$\therefore x = 3$$

실근의 개수 : 2 개.

35.  $X = \{x \mid x \geq k\}$  를 정의역으로 하는 함수  $f(x) = |x^2 - 1|$  의 역함수가 존재할 때, 실수  $k$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$  이면  $x \leq -1$ ,  $x \geq 1$ ,  $x^2 - 1 < 0$

이면  $-1 < x < 1$

따 라 서,  $f(x) = |x^2 - 1| =$

$$\begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1, x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$$

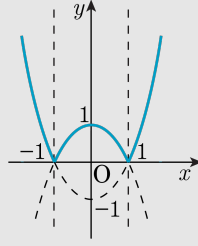
$y = f(x)$  의 그래프는 다음 그림과 같으므로

함수  $f(x)$  가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$  또는  $\{x \mid x \leq -1\}$

또는  $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$  또는  $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉,  $X = \{x \mid x \geq k\}$  를 정의역으로 하려면  $k$  의 최솟값은 1이다.



36. 세 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  가  $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$  을 만족할 때,  $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3)$  의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ g)^{-1}(3) = a \text{ 로 놓으면 } (f \circ g)(a) = 3$$

$$2a - 3 = 3 \text{ 에서 } a = 3$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$$

$$h^{-1}(3) = b \text{ 놓으면 } h(b) = 3$$

$$2b + 1 = 3$$

$$\therefore b = 1$$

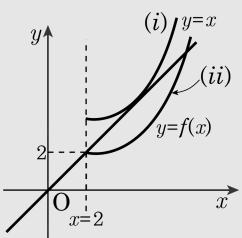
$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = h^{-1}(3) = 1$$

37. 함수  $f(x) = x^2 - 4x + k (x \geq 2)$  의 그래프와 그 역함수  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수  $k$  의 값의 범위는?

- ①  $0 < k < \frac{25}{4}$ 
 ②  $k < \frac{25}{4}$ 
 ③  $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
- ④  $6 < k \leq \frac{25}{4}$ 
 ⑤  $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설

주어진 함수  $y = f(x)$  의 그래프와 그 역함수  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프는 직선  $y = x$  에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은  $y = x$  위에 있다.  
따라서, 조건을 만족하려면  $f(x) = x^2 - 4x + k = (x - 2)^2 + k - 4 (x \geq 2)$  의 그래프와 직선  $y = x$  가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



- (i)  $y = f(x)$  의 그래프와 직선  $y = x$  가 접할 때,  
 $x^2 - 4x + k = x, x^2 - 5x + k = 0$   
 이 이차방정식의 판별식을  $D$  라 하면  
 $D = 5^2 - 4k = 0$   
 $\therefore k = \frac{25}{4}$
- (ii)  $y = f(x)$  의 그래프가 점  $(2, 2)$  를 지날 때  
 $2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$  이므로  $k = 6$
- (i), (ii) 에서  $6 \leq k < \frac{25}{4}$

38. 함수  $f(x)$ 가  $f(x) = \begin{cases} 2x-9 & (x \geq 0) \\ \frac{2}{3}x-9 & (x < 0) \end{cases}$  일 때, 방정식  $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합을 구하여라. (단,  $f^{-1}(x)$ 는  $f(x)$ 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -18

해설

함수  $y = f(x)$ 의 그래프와 직선  $y = x$ 의 교점의  $x$ 좌표를 구하면

$2x - 9 = x$ 에서  $x = 9$

$\frac{2}{3}x - 9 = x$ 에서  $x = -27$

따라서, 방정식  $f(x) = f^{-1}(x)$ 의 모든 근의 합은

$9 + (-27) = -18$

39. 집합  $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여  $A$ 에서  $A$ 로의 두 함수  $f, g$ 가 일대일 대응이고  $f(2) = 1, g(3) = 3, (f \circ g)(1) = 2$ 일 때,  $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$ 의 값은?

- ① 2                      ② 3                      ③ 4                      ④ 5                      ⑤ 6

해설

$g(3) = 3$ 이고 함수  $g$ 는 일대일 대응이므로  $g(1) = 1$  또는  $g(1) = 2$ 이다.  
만약  $g(1) = 2$ 라고 가정하면  
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$ 이다.  
그러나 문제의 조건에서  $f(2) = 1$ 이므로 모순이다.  
따라서  $g(1) = 1$ 이다.  
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$ 이고  
 $(f \circ g)(1) = 2$ 이므로  $f(1) = 2$ 이다.  
 $f(1) = 2, f(2) = 1$ 이므로  $f(3) = 3$ 이다.  
 $g(1) = 1, g(3) = 3$ 이므로  $g(2) = 2$ 이다.  
 $\therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) = g(f(1)) + g(f(3))$   
 $\qquad\qquad\qquad = g(2) + g(3)$   
 $\qquad\qquad\qquad = 2 + 3 = 5$

40. 함수  $f(x)$  의 역함수를  $g(x)$ , 함수  $f(2x-1)$  의 역함수를  $h(x)$  라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

①  $h(x) = 2g(x) + 1$

②  $h(x) = 2g(x) - 1$

③  $h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$

④  $h(x) = g(\frac{x}{2} + 1)$

⑤  $h(x) = \frac{1}{2}g(2x-1) + 1$

해설

$f(x)$  의 역함수가  $g(x)$  이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 = g(y) \cdots \textcircled{1}$$

$f(2x-1)$  의 역함수가  $h(x)$  이므로

$$y = f(2x-1) \Leftrightarrow x = h(y) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x \text{ 를 소거하면 } 2h(y) - 1 = g(h)$$

$$\text{그러므로 } h(y) = \frac{1}{2} \{g(h) + 1\}$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{2} \{g(x) + 1\}$$