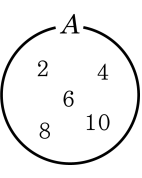


1. 다음 벤 다이어그램의 집합 A 를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은?



- ① $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$
② $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\}$
③ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$
④ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 배수}\}$
⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로 조건제시법으로 나타내면 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 이다.

2. $n(\{1, 3, 5, 7, 9\}) - n(\{3, 6, 9\})$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

(준식) $= 5 - 3 = 2$

3. 두 집합 $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
- ① $3 \in A$

② $1 \notin B$

③ $\emptyset \in B$

④ $\{1\} \in A$

⑤ $\{1, 2, 3, 6\} \subset B$

해설

② 1은 B 에 속하므로 $1 \in B$ 이다.

③ $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset B$ 이다.

④ $\{1\} \in A$ 에서 집합과 집합의 관계에서는 $\subset$ 를 써야 한다.

5. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$ 일 때, 공집합이 아닌 부분집합의 개수는?

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

해설

$A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

전체 부분집합의 개수 : $2^5 = 32$

공집합을 제외한 부분집합의 개수 : $32 - 1 = 31$

6. 두 집합 $A = \{x, 7\}$, $B = \{3, x+4\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, x 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$A = B$ 이면 두 집합의 모든 원소가 같다.
따라서 $x = 3$ 이다.

7. 두 집합 $A = \{1, a\}$, $B = \{2, 3, a - 2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 집합 A, B 는 $A \cap B$ 를 포함한다.

$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 $\{1, 3\} \subset \{1, a\}$, $\{1, 3\} \subset \{2, 3, a - 2\}$ 이다.

따라서 $a = 3$ 이다.

8. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합에 대하여 주어진 집합 ㉠, ㉡, ㉢에 대하여 서로 같은 것을 ㉠, ㉡, ㉢ 중 찾아 순서대로 쓰시오.

- ㉠ $\{1, 2, 4\}^C$
- ㉡ $\{(1, 2, 3, 5) \cap \{2, 3, 5, 6\}\}^C$
- ㉢ $\{1, 3, 4, 6\}^C$

- ㉠ $\{2, 5\}$
- ㉡ $\{3, 5, 6\}$
- ㉢ $\{1, 4, 6\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

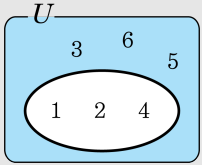
▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

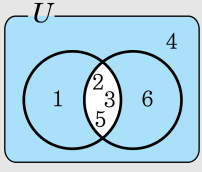
▷ 정답 : ㉠

해설

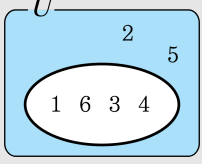
i) $\{1, 2, 4\}^C$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



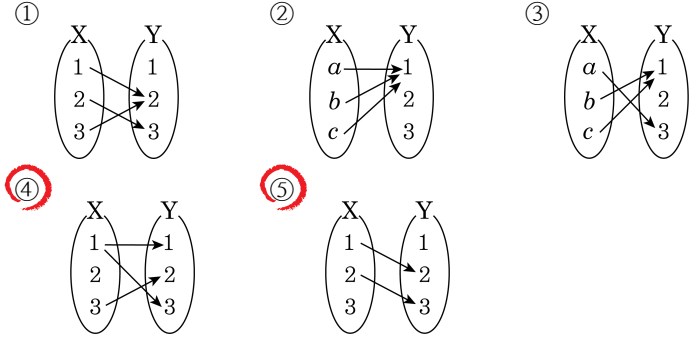
ii) $\{(1, 2, 3, 5) \cap \{2, 3, 5, 6\}\}^C$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



iii) $\{1, 3, 4, 6\}^C$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



9. 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것을 모두 고르면?



해설

- ④ X 의 원소 1에 대응되는 Y 의 원소는 2개이고 X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
⑤ X 의 원소 3에 대응되는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

10. 유리식 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ 을 간단히 하면? (단, $a \neq b$)

- ① $\frac{a+b}{a-b}$ ② $\frac{a-b}{a+b}$ ③ $\frac{a}{a+b}$ ④ $\frac{a}{a-b}$ ⑤ 1

해설

$$\frac{a^2 - b^2}{(a - b)^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a - b)^2} = \frac{a + b}{a - b}$$

11. 다음 중 집합의 원소가 없는 것은?

- ① $\{0\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 약수 중 홀수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 3 \times x = -1 \text{인 자연수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 11 < x \leq 12 \text{인 자연수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } x \leq 1 \text{인 자연수}\}$

해설

- ① $\{0\}$
- ② $\{1\}$
- ④ $\{12\}$
- ⑤ $\{1\}$

12. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z 는 모두 실수)

- ① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$
② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$
③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$
④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$
⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

- ① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

13. 자연수 n 에 대하여 2^{4n} , 3^{3n} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $2^{4n} < 3^{3n}$

② $2^{4n} > 3^{3n}$

③ $2^{4n} \leq 3^{3n}$

④ $2^{4n} \geq 3^{3n}$

⑤ $2^{4n} = 3^{3n}$

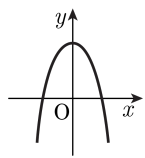
해설

$$\frac{2^{4n}}{3^{3n}} = \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n = \left(\frac{16}{27}\right)^n < 1$$

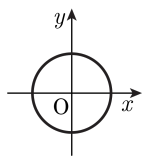
$$\therefore 2^{4n} < 3^{3n}$$

14. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

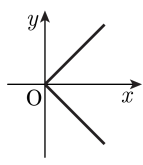
①



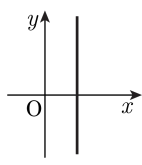
②



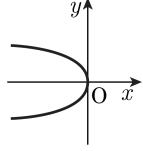
③



④



⑤



해설

함수는 하나의 x 값에 여러 개의 y 값이 대응될 수 없다.

15. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

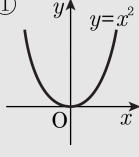
해설

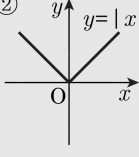
0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$ 이면
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$ 이다.
위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
 $f(x) = 1$ 은 부적당
 $\therefore f(0) = 0$

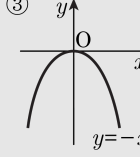
16. 다음 중 일대일 함수는? (x 는 모든 실수)

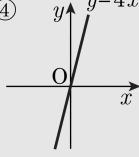
- ① $f(x) = x^2$
- ② $f(x) = |x|$
- ③ $f(x) = -x^2$
- ④ $f(x) = 4x$
- ⑤ $f(x) = 5$

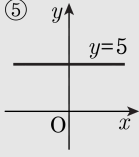
해설

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의
각 원소의 함수값이 서로 다를 때 일대일 함수라 한다.

17. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a , 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
 $\therefore 4^3 = 64$
 $\therefore a + b = 64$

18. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

19. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left| 4\left(x + \frac{a}{4}\right) \right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

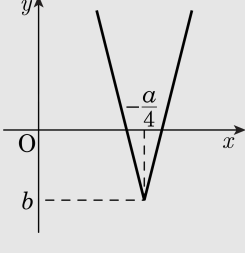
x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3, b = -2$

따라서 $a = -12, b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$



20. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 10$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x-1-x} = 1-x \\ 1-x &= 10 \\ \therefore x &= -9\end{aligned}$$

21. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

22. $x : y = 4 : 3$ 일 때, $\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x : y = 4 : 3$$

$$3x = 4y$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}y$$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{16}{9}y^2 + \frac{4}{3}y^2}{\frac{16}{9}y^2 - y^2} = \frac{28}{7} = 4$$

해설

$$x : y = 4 : 3 \Rightarrow x = 4k, y = 3k$$

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{16k^2 + 12k^2}{16k^2 - 9k^2} = \frac{28k^2}{7k^2} = 4$$

23. $y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 이므로

점근선 $x=1$ 에서 $y = \frac{ax+1}{x-1}$

점근선 $y=2$ 에서 $y = \frac{2x+1}{x-1}$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로

$\therefore a+b=2-1=1$

24. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

- I. $y = \frac{2x-5}{x-2}$
- II. $y = \frac{2}{x-1}$
- III. $y = \frac{3x+4}{x+1}$
- IV. $y = \frac{2x}{x-1}$

- ① I, II ② I, IV ③ II, IV
④ II, III ⑤ I, II, IV

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

이므로 $y = \frac{k}{x-p} + q$

꼴로 정리 했을 때, $k = 2$ 이면
평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

I. $y = \frac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$

$\therefore k = -1$

II. $y = \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$

III. $y = \frac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1} \therefore k = 1$

IV. $y = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1} \therefore k = 2$

25. 곡선 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x = a$, $y = b$ 이다. $m + n + a + b$ 의 값은?

- ① 6 ② 1 ③ 2 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3$, $n = 1$

$$\text{또, } y = \frac{3x-1}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 3 \text{ 에서}$$

점근선은 $x = -1$, $y = 3$ $a = -1$, $b = 3$

따라서 구하는 합은 6

26. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$ 일 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ 이므로 } f^{-1}(x) = \frac{4x-3}{-x+2} \text{ 의}$$

역함수를 구하면

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{ax+b}{x+c}$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore 2+3+4=9$$

27. 함수 $y = \frac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 $(3, -2)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$f(x) = \frac{ax+b}{x-2}$ 의 그래프가 점 $(3, -2)$ 를 지나므로 $f(3) = -2$

$$\Rightarrow -2 = 3a + b \cdots \textcircled{1}$$

또, 이 함수의 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 가 점 $(3, -2)$ 을 지나므로

$$f^{-1}(3) = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{-2a+b}{-4}$$

$$\Rightarrow -2a + b = -12 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $a = 2, b = -8$

$$\therefore a + b = -6$$

28. 40명의 학생 중 수학을 좋아하는 학생이 24 명, 영어를 좋아하는 학생이 18 명, 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생이 9 명일 때, 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생수를 구하여라.

▶ **답:** 명

▶ 정답: 7 명

해설

수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 영어를 좋아하는 학생을 집합 B 라고 하자.

수학과 영어를 좋아하는 학생, 즉 $A \cap B = 9$ 이다.

수학과 영어를 모두 싫어하는 학생은 합집합을 제외한 나머지 인원이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = 24 + 18 - 9$$

$x = 33$

$n(A \cup B) = 33$ 이므로 수학과 영어를 모두 싫어하는 학생은 $40 - 33 = 7$ (명)이다.

29. 자연수 범위에서 정의된 두 집합 $A = \{2, 3, a^2 + 4\}$, $B = \{a + 1, 4, 2a + 3\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 5\}$ 가 되도록 하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이어야 하므로 집합 A 에서 $a^2 + 4 = 5 \quad \therefore a = \pm 1$

(i) $a = 1$ 일 때, $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 5\}$

$A \cap B = \{2, 5\}$

(ii) $a = -1$ 일 때,

$A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{0, 1, 4\}$

$A \cap B = \emptyset$

$\therefore a = 1$

30. 실수 x, y 에 대하여 조건 ' $|x| + |y| = 0$ '의 부정과 같은 것은?

- ① $x = y = 0$
- ② $x = y \neq 0$
- ③ $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$
- ④ x, y 중 적어도 하나는 0 이다.
- ⑤ x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$|x| + |y| = 0$ 의 부정은 $|x| + |y| \neq 0$ 이다.
따라서, $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이므로 x, y 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

31. 명제 ‘모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.’를 부정한 것은?

- ① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.
- ② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.
- ④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이고 $zx \neq xy$ 이다.
- ⑤ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

‘ $xy = yz = zx$ ’는 ‘ $xy = yz$ 이고 $yz = zx$ 이고 $zx = xy$ ’이므로
‘ $xy = yz = zx$ ’의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$
이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여
 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

32. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p : |x - 2| < a \text{ (단, } a > 0 \text{)}$$
$$q : x < -3 \text{ 또는 } x > 1$$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위를 $\alpha < a \leq \beta$ 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$|x - 2| < a$ 에서 $-a < x - 2 < a \therefore 2 - a < x < 2 + a \therefore$
 $P = \{x | 2 - a < x < 2 + a\}$, $Q = \{x | x < -3 \text{ 또는 } x > 1\}$
따라서 $P \subset Q$ 가 되려면 $2 + a \leq -3 \cdots \textcircled{1}$ 또는 $2 - a \geq 1 \cdots \textcircled{2}$,
즉, $a \leq -5$ 또는 $a \leq 1$
그런데 $a > 0$ 이므로 구하는 a 의 범위는 $0 < a \leq 1$

$\textcircled{1} :$

$\textcircled{2} :$

$\therefore \alpha = 0, \beta = 1$
 $\therefore \alpha + \beta = 1$

33. 두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim r \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은? (단, $\sim p$ 는 p 의 부정이다.)

- ① $q \rightarrow \sim p$
- ② $p \rightarrow r$
- ③ $q \rightarrow \sim r$
- ④ $\sim q \rightarrow r$
- ⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow \sim q, \sim r \rightarrow q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim p, \sim q \rightarrow r$ 도 참이다.
 $p \rightarrow \sim q \rightarrow r$ 이므로 $p \rightarrow r$, 그 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

34. 다음 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 실수이다.)

- ㉠ $p : a^2 + b^2 = 0, q : ab = 0$
- ㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0, q : a = b = c$
- ㉢ $p : a > b$ 이고 $b > c, q : a > c$

- ① ㉠
- ② ㉠, ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $p : a^2 + b^2 = 0$ 에서 $a = b = 0$ 이고, $q : ab = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 이므로 $p \Rightarrow q, q \nRightarrow p$ 이다.

㉡ $p : (a - b)(b - c) = 0$ 에서 $a = b$ 또는 $b = c$ 이고 $q : a = b = c$ 이므로 $p \nRightarrow q, q \Rightarrow p$ 이다.

㉢ $p \Rightarrow q, q \nRightarrow p$ 이다.

35. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(2a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$(2a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b} \right) = 10 + \frac{b}{a} + \frac{16a}{b}$$

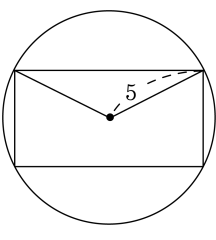
산술기하조건을 사용하면

$$\frac{b}{a} + \frac{16a}{b} \geq 2 \sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 8$$

$\therefore$ 최솟값은 $10 + 8 = 18$

36. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $10\sqrt{2}$
 ④ $20\sqrt{2}$ ⑤ $100\sqrt{2}$



해설

직사각형의 대각선의 길이는 10 이고,
 가로 길이를 a , 세로 길이를 b 라 하면
 $a^2 + b^2 = 100$
 코시-슈바르츠의 부등식에 의해
 $(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
 $\therefore 200 \geq (a + b)^2 \therefore a + b \leq 10\sqrt{2}$ 이므로
 직사각형 둘레의 길이의 최댓값은
 $2(a + b) = 20\sqrt{2}$

37. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다. 그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

38. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
 이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $x+2y=2$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분을

각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2만큼
 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.

직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면

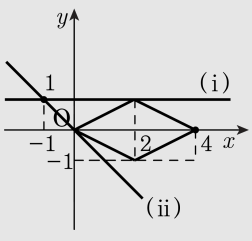
(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때

$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.



39. 분수식 $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \dots \textcircled{1}$$

①에서 분자를 x 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2(z-y) + y^2(z-x) + z^2(y-x) \\ &= (z-y)x^2 - (z^2-y^2)x + yz^2 - y^2z \\ &= (z-y)x^2 - (z+y)(z-y)x + zy(z-y) \\ &= (z-y)\{x^2 - (z+y)x + zy\} \\ &= (z-y)(x-z)(x-y) = (x-y)(y-z)(z-x) \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1 \end{aligned}$$

40. 0이 아닌 실수 x, y, z 에 대하여 등식 $2x - 6y + 4z = 0$, $3x + y - 2z = 0$ 이 성립한다. 이때, $\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

해설

두 식을 연립하여 풀면 $2x = y$ 가 나온다.

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + y^2} = \frac{x^2 + 4x^2}{2x^2 + 4x^2} = \frac{5x^2}{6x^2} = \frac{5}{6}$$

41. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 골라라.

2, 3, 9, 11, 15, 18

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 9

해설

$A \subset B$ 이면 $\square$ 는 9의 약수이어야 한다. 따라서, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 9 중 하나이며 보기 중에는 3, 9이다.

42. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중에서 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수는?

① 16 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 22 개 ⑤ 24 개

해설

원소 개수가 n 개인 집합의 부분집합 개수 = 2^n

㉠ 집합 A 의 부분집합 개수: $2^5 = 32$

㉡ 3, 7을 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수: $2^3 = 8$

㉢ 3 또는 7을 원소로 갖는 집합의 개수: $2^5 - 2^3 = 24$

43. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 일 때, 적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 A 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 48개 ② 44개 ③ 40개 ④ 35개 ⑤ 32개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

짝수만으로 이루어진 부분집합은 $\{2, 4, 6, 12\}$ 의 부분집합 중 공집합을 제외한 것이므로 그 개수는 $2^4 - 1 = 15$ (개)이다.

A 의 전체 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개)이고 그 중 공집합을 제외한 것은 63개이다.

적어도 하나는 홀수를 원소로 갖는 부분집합을 짝수만으로 이루어진 부분집합을 제외한 것이므로 구하는 개수는 $63 - 15 = 48$ (개)이다.

44. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $A \cap B \neq B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = A$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$

④ $n(A \cap B \cap \emptyset) = 0$

⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

① $A \cap B = B \cap A$

② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$

③ $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

45. 다음 중에서 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = B - A$ 이 성립하기 위한 A, B 사이의 관계는 ?

① $A \subset B$

② $A = B$

③ $B \subset A$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = B - A$$

$$\therefore A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B$$

46. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 20$, $n(B) = 16$, $n(A \cup B) = 29$ 일 때,
 $n(A - B) - n(B - A)$ 는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 20 + 16 - 29 = 7$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 7 = 13$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$$

$$\therefore n(A - B) - n(B - A) = 13 - 9 = 4$$

47. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

- ① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$
- ② $x + y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$
- ③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$
- ④ $x \leq 2$ 이면 $|x - 1| \leq |x - 3|$
- ⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$

해설

- ① 거짓 : (반례) $x = -2, y = -1$ 일 때,
 $xy = 2 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $-1 < 0$ 이다.
- ② 거짓 : (반례) $x = -2, y = 3$ 일 때,
 $x + y = -2 + 3 \geq 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이고 $3 > 0$ 이다.
- ③ 거짓 : (반례) $x = 2, y = -2$ 일 때,
 $2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
- ④ $|x - 1| \leq |x - 3|$ 의 양변을 제곱하면
 $x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 6x + 9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
- ⑤ 명제 ‘ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ ’ 은 참이지만, 그의 역 ‘ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a > 0$ 이고 $b > 0$ ’은 거짓이다.

48. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5$ 일 때,
 $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$

② $2x-2$

③ $4x-2$

④ $6x-3$

⑤ $8x-3$

해설

$$\frac{3x+1}{2} = t \text{ 라 하면 } 2t = 3x+1$$

$$\therefore x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5 \text{ 에서}$$

$$f(t) = 6 \cdot \frac{2t-1}{3} - 5 = 4t-7$$

$$\therefore f(2x+1) = 4(2x+1) - 7 = 8x-3$$

49. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(3g(x) + 4x + 6) = x$ 가 성립한다. 이 때, $f(3) + g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$f(3g(x) + 4x + 6) = x$ 에서
 $f^{-1}(x) = 3g(x) + 4x + 6$
이때, $f^{-1}(x) = g(x)$ 이므로
 $g(x) = 3g(x) + 4x + 6$
 $\therefore g(x) = -2x - 3$
한 편, $y = g(x)$ 로 놓고 $y = -2x - 3$ 을
 x 에 대하여 정리하면 $2x = -y - 3$ 에서
 $x = -\frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$
여기서 x, y 를 서로 바꾸면
 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
 $\therefore f(x) = g^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
 $\therefore f(3) + g(3) = -3 - 9 = -12$

50. 두 함수 $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -x + 2$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1)$ 의 값은?

① -4

② -2

③ $-\frac{4}{3}$

④ 0

⑤ 1

해설

$$g^{-1}(x) = -x + 2$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(x)) &= g^{-1}(3x - 1) = -(3x - 1) + 2 \\ &= -3x + 3 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(1) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(1) \\ &= (g^{-1} \circ f)(1) \\ &= g^{-1}(f(1)) = 0 \end{aligned}$$