1. 세 수 $A=3\sqrt{3}-1,\ B=\sqrt{3}+2,\ C=2\sqrt{3}+1$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C<B<A$　② $A<B<C$　③ $A<C<B$

④ $B<A<C$　⑤ $B<C<A$

해설

i) $A-B=(3\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+2)$

$=2\sqrt{3}-3=\sqrt{12}-\sqrt{9}>0$

$\therefore A>B$

ii) $B-C=(\sqrt{3}+2)-(2\sqrt{3}+1)$

$=1-\sqrt{3}<0$

$\therefore B<C$

iii) $C-A=(2\sqrt{3}+1)-(3\sqrt{3}-1)$

$=2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$

$\therefore C>A$

따라서 $B<A<C$

2. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}, B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}\,, C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0,\ B > 0,\ C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$

$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

3. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$a>0,\ b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)$$

$$=1+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}$$

$$=5+4=9$$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 즉 $b=2a$ 일 때 성립)

4. $x>0,\ y>0$ 일 때, $(3x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x>0,\ y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$

$=3+\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y}+12\geq 15+2\sqrt{\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y}}$

$=15+12$

(단, 등호는 $\frac{4y}{x}=\frac{9x}{y}$, 즉 $3x=2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 27 이다.

5. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore\ M+n=5+(-5)=0$

6. $q > p > 1$인 실수 $p,\ q$에 대하여 $pq+p$와 p^2+q의 대소를 비교하면?

① $pq+p < p^2+q$
② $pq+p \le p^2+q$
③ $pq+p > p^2+q$
④ $pq+p \ge p^2+q$
⑤ $pq+p = p^2+q$

해설

$$\begin{aligned}(pq+p)-(p^2+q) &= pq-q-p^2+p \\ &= q(p-1)-p(p-1) \\ &= (p-1)(q-p)\end{aligned}$$

$q > p > 1$이므로 $p-1>0,\ q-p>0$
따라서 $(p-1)(q-p)>0$이므로
$pq+p > p^2+q$

7. $a > b > 0$ 일 때, $a^2 > b^2$ 이다. 임을 이용하여 $x > y > -1$ 일 때, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{y+1}$ 의 대소를 비교하면?

① $\sqrt{x+1} < \sqrt{y+1}$ ② $\sqrt{x+1} \le \sqrt{y+1}$

③ $\sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$ ④ $\sqrt{x+1} \ge \sqrt{y+1}$

⑤ $\sqrt{x+1} = \sqrt{y+1}$

해설

$$\begin{aligned}(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{y+1})^2 &= (x+1) - (y+1) \\ &= x - y > 0\end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{x+1} > \sqrt{y+1}$

8. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$ ② $ab \ge 0$ ③ $a+b \ge 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

9. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y|=|x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy=|xy|$

(i) $xy=|xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy=|xy|$

(i), (ii) 에서

$xy=|xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

10. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \le |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$(|a|+|b|)^2 - |a+b|^2$
$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= 2($ ㉠ $) \ge 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \ge |a+b|^2$
그런데 $|a|+|b| \ge 0,\ |a+b| \ge 0$ 이므로
$|a|+|b| \ge |a+b|$ (단, 등호는 (㉡), 즉 (㉢)일 때, 성립)

① $|ab|+ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

② $|ab|+ab,\ |ab|=-ab,\ ab \ge 0$

③ $|ab|-ab,\ |ab|=-ab,\ ab \le 0$

④ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \ge 0$

⑤ $|ab|-ab,\ |ab|=ab,\ ab \le 0$

해설

㉠ : $|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2$
$= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab$
$= 2(|ab| - ab)$
㉡ : 등호는 $|ab| - ab = 0$ 일 때 성립
$\Rightarrow |ab| = ab$
㉢ : $|ab| = ab$ 이려면 $ab \ge 0$ 이어야 한다

11. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

12. a, b가 양수일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)$의 최솟값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=1+4ab+\frac{1}{ab}+4$$

a, b가 양수이므로, $ab>0$

$$4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\cdot\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$$

$$\therefore\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+4b\right)=4ab+\frac{1}{ab}+5\geq 5+4=9$$

13. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여 xy의 최솟값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$, $\frac{1}{4}\geq\sqrt{\frac{1}{xy}}$

$\therefore\ \frac{1}{16}\geq\frac{1}{xy}$

따라서 $xy\geq 16$이므로 xy의 최솟값은 16

14. $x+y=3$ 일 때, xy 의 최댓값을 구하여라. (단, $xy>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4}$

해설

$3=x+y\geq 2\sqrt{xy}$

따라서 $x=y=\frac{3}{2}$ 일 때, xy의 최댓값 $\frac{9}{4}$

15. 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x-y+4z=3\sqrt{2}$일 때 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x,\ y,\ z$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$\left\{1+(-1)^2+4^2\right\}(x^2+y^2+z^2)$
$\geq (x-y+4z)^2$
$18(x^2+y^2+z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
$x^2+y^2+z^2 \geq 1$
따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 1이다.

16. $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$$

$$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$$

이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로

$$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

17. $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$

② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$

⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

해설

$(a+b)(x+y) - 2(ax+by)$

$= ay + bx - ax - by$

$= a(y-x) - b(y-x)$

$= (a-b)(y-x)$

그런데 $a-b > 0,\ y-x < 0$

$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

18. 임의의 실수 a, b, c 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $|a| = -a$

② $a > b > 0$ 일 때, $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ 이다.

③ $|a| \geq 0$, $|a| \geq a$, $|a| = |-a|$ 이다.

④ $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $|a-b| \geq |a|-|b|$

해설

① $|a| = a(a \geq 0)$

$-a(a<0)$

② 참

③ 참

④ $(|a+b+c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(|a|+|b|+|c|)^2$

$= a^2+b^2+c^2+2(|a||b|+|b||c|+|c||a|)$

$|a||b| \geq ab,\ |b||c| \geq bc,\ |c||a| \geq ca$

$\therefore |a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

⑤ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(|a|-|b|)^2 = a^2-2|a||b|+b^2\ (\because |a||b| \geq ab)$

$\therefore |a-b| \geq |a|-|b|$

19. 부등식 $x^2+(a+1)x+(a+1)\geq 0$이 절대부등식이 되기 위한 정수 a의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

$D=(a+1)^2-4(a+1)\leq 0$이어야 하므로

$a^2+2a+1-4a-4$

$=a^2-2a-3=(a-3)(a+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$

따라서 정수 a의 개수는 -1, 0, 1, 2, 3으로 5개

20. 다음은 $a,\ b,\ c$가 실수일 때 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ 를 증명한 것이다.[가], [나]에 들어갈 내용을 차례대로 나열한 것은?

> $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
> ([가]) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$ ([나])0
> $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=0$ 일
> $a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$
> 때 성립)

① $\frac{1}{2}$, $>$　② $\frac{1}{2}$, $\geq$　③ 2, $>$　④ 2, $\geq$　⑤ 2, $=$

해설

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

두식의차를변형하면

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0$

$\because a, b, c$ 가 실수이므로 $(a-b)^2 \geq 0$,

$(b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ (단, 등호는 $a=b=c$ 일 때

$a^2+b^2+c^2 \geq (ab+bc+ca)$

성립)

21. $(1+a)(1+b)(1+c)=8$인 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $abc \le 1$임을 다음과 같이 증명하였다.

증명

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이때, $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 산술평균 , 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3$ ([가])
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore S \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $^3\sqrt{abc}+1 \le 2,\quad abc \le 1$
(단, 등호는 ([나]) 일 때 성립)

위의 증명에서 [가], [나], [다]에 알맞은 것을 순서대로 적으면 ?

① $abc,\ a=b=c=1$
② $\sqrt[3]{abc},\ a=2$이고 $b=c$
③ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=1$
④ $abc,\ a=b$이고$c=2$
⑤ $(\sqrt[3]{abc})^2,\ a=b=c=2$

해설

$(1+a)(1+b)(1+c)=8$을 전개하면
$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$
이 때 $a>0,\ b>0,\ c>0$이므로
산술평균, 기하평균의 관계를 이용하면
$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$ab+bc+ca \ge 3(\sqrt[3]{abc})^2$
(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립)
$\therefore 8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3(\sqrt[3]{abc})^2+abc$
$=(1+\sqrt[3]{abc})^3$
따라서 $\sqrt[3]{abc}+1 \le 2,\ abc \le 1$
(단, 등호는 $a=b=c=1$일 때 성립)

22. $a > 0, b > 0$일 때, $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right) = ab+4+1+\dfrac{4}{ab}$

ab와 $\dfrac{4}{ab}$가 양수이므로

$ab+\dfrac{4}{ab} \geq 2\cdot\sqrt{ab\cdot\dfrac{4}{ab}} = 4$

$\therefore ab+\dfrac{4}{ab}+5 \geq 4+5 = 9$

23. $x > 0,\ y > 0,\quad x + 2y = 1$ 일 때, $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x > 0,\ y > 0$ 이므로 산술기하평균의 관계로부터

$x + 2y = 1 \geq 2\sqrt{2xy},\ \dfrac{1}{2} \geq \sqrt{2xy},\ \dfrac{1}{8} \geq xy$

즉 xy 의 최댓값은 $\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} \geq 2\sqrt{\dfrac{2}{xy}}$ 이므로 $xy = \dfrac{1}{8}$ 일 때 최소

$\therefore\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} \geq 8$

해설

$x + 2y = 1$ 이면 $y = \dfrac{1-x}{2}$

$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{1-x}{2}} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{2}{x(1-x)}$

$x(1-x)$ 의 최댓값을 구하는 문제

$x(1-x) = -x^2 + x = (x^2 - x + \dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{4}$

$\quad = -(x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ x(1-x)$ 의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}$ 이고

이때 $\dfrac{2}{x(1-x)}$ 의 최솟값은 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{4}} = 8$

24. 산술-기하평균을 이용하여 $x+y=4$일 때, xy의 최댓값을 구하여라. (단, $x>0,\ y>0$)

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x+y=4$라면

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\sqrt{xy} \le 2$에서 $xy \le 4$

$\therefore$ xy의 최댓값은 4이다.

25. 양수 a, b가 $a+b=1$을 만족할 때, $\dfrac{a^2+1}{a}+\dfrac{b^2+1}{b}$의 최솟값을 구하면?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$a>0,\ b>0$ 이고, $a+b=1$이므로,

$$\frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}=\frac{(a^2b+ab^2)+(a+b)}{ab}$$

$$=\frac{ab(a+b)+(a+b)}{ab}=\frac{ab(a+b)}{ab}+\frac{a+b}{ab}$$

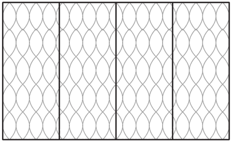
$$=(a+b)+\frac{a+b}{ab}=1+\frac{1}{ab}$$

$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$에서 $\dfrac{1}{2}\geq\sqrt{ab}(\because\ a+b=1)$

$$\therefore\ \frac{1}{ab}\geq 4$$

$$\therefore\ \frac{a^2+1}{a}+\frac{b^2+1}{b}=1+\frac{1}{ab}\geq 1+4=5$$

26. 어떤 농부가 길이 60 m 의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2 ② 70m^2 ③ 80m^2

④ 90m^2 ⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면

$2a+5b=60$

$a,\ b$는 양수이므로

$60=2a+5b\geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$

양변을 제곱하면 $40ab\leq 60^2$

$\therefore\ ab\leq 90$

한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로

$S=ab\leq 90$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

27. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$　② 4　③ $4\sqrt{2}$　④ 8　⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면

$xy = 8 \cdots$ ㉠

피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$ 이다.

$x > 0,\ y > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$

$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$

단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.

$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$

따라서 $x = 2\sqrt{2}$ 이다.

$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

28. $a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y,\ z$가 실수일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.(단, 순서대로 쓸 것)

㉠ $a^2+b^2 \geq ab$
㉡ $a^2+b^2+1 < 2(a+b-1)$
㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \leq (ax+by+cz)^2$
㉣ $\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert+\lvert b\rvert$
㉤ $\lvert a\rvert-\lvert b\rvert \geq \lvert a-b\rvert$
㉥ $\lvert a+b\rvert \geq \lvert a\rvert-\lvert b\rvert$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉥

해설

부등식의 증명 : 좌변에서 우변을 뺀 값의 부호 결정한다.

㉠ $a^2+b^2-ab = a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2$

$= (a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$

$\therefore\ a^2+b^2 \geq ab$: 맞음

㉡ $a^2+b^2+1-2(a+b-1)$

$= a^2-2a+b^2-2b+3$

$= (a-1)^2+(b-1)^2+1 > 0$

$\therefore\ a^2+b^2+1 > 2(a+b-1)$: 틀림

㉢ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2$

$+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+$

$2abxy+2bcyz+2cazx)$

$= (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0$

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$: 틀림

㉣ 제곱의 차를 구해본다. (우변에서 좌변을 뺀 값)

$(\lvert a\rvert+\lvert b\rvert)^2-\lvert a+b\rvert^2$

$= a^2 2\lvert ab\rvert+b^2-(a^2+2ab+b^2)$

$= 2\lvert ab\rvert-2ab \geq 0(\because\ \lvert ab\rvert \geq ab)$

$\therefore\ \lvert a\rvert+\lvert b\rvert \geq \lvert a+b\rvert$: 맞음

㉤ 제곱의 차 비교

$(\lvert a\rvert-\lvert b\rvert)^2-\lvert a-b\rvert^2$

$= a^2-2\lvert ab\rvert+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

$= -2\lvert ab\rvert+2ab \leq 0(\because \lvert ab\rvert \geq ab)$

$\therefore\ \lvert a\rvert-\lvert b\rvert \leq \lvert a-b\rvert$: 틀림

㉥ $\lvert a+b\rvert^2-(\lvert a\rvert-\lvert b\rvert)^2$

$= a^2+2ab+b^2-(a^2-2\lvert ab\rvert+b^2)$

$= 2ab+2\lvert ab\rvert \geq 0$

$\therefore\ \lvert a+b\rvert \geq \lvert a\rvert-\lvert b\rvert$: 맞음

29. 다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

증명

양수 a, b, H에 대하여
적당한 실수 r가 존재하여
$a = H + \frac{a}{r}$, $H = b + \frac{b}{r} \cdots (A)$가 성립한다고 하자.
그러면 $a \neq b$이고 $\frac{a-H}{a} =$ (가) $\cdots (B)$이므로
$H =$ (나)이다.
역으로, $a \neq b$인 양수 a, b에 대하여
$H =$ (나)이면,
식 (B)가 성립하고 $\frac{a-H}{a} \neq 0$이다.
(B)에서 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$이라 놓으면
식 (A)가 성립한다. 따라서 양수 a, b, H에 대하여 적당한 실수
r이 존재하여
식 (A)가 성립하기 위한 (다) 조건은
$a \neq b$이고 $H =$(나)이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 충분

해설

$a = H + \frac{a}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{a-H}{a}$

$H = b + \frac{b}{r}$에서 $\frac{r}{1} = \frac{H-b}{b}$

$\therefore \frac{a-H}{a} =$ (가) $\underline{\frac{H-b}{b}}$

$ab - bH = aH - ab$이므로 $H =$ (나) $\underline{\frac{2ab}{a+b}}$

따라서 (다) 필요충분조건

30. $a > 1$일 때, $\dfrac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$