

2. 두 집합 $A = \{b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{b, c\}$

② $\{a, b, c\}$

③ $\{a, c, e\}$

④ $\{a, b, f\}$

⑤ $\{a, b, c, d, e\}$

해설

③ $\{b, c\} \not\subset \{a, c, e\}$

④ $\{b, c\} \not\subset \{a, b, f\}$

3. 다음 중 $A \subset B$ 와 같은 것이 아닌 것은?

① $A \cup B = B$ ② $A^c \cup B = U$ ③ $A - B = \emptyset$

④ $B - A = B$ ⑤ $B^c \subset A^c$

해설

$A \subset B$

$\leftrightarrow A \cup B = B$

$\leftrightarrow A - B = \emptyset$

$\leftrightarrow B^c \subset A^c$

$\leftrightarrow A^c \cup B = U$

4. 집합 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 중에서 $\{a, c, f\}$ 와 서로소인 집합의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$$2^{6-3} = 2^3 = 8(\text{개})$$

5. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 8, 10\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는?

① $\{2\}$

② $\{4\}$

③ $\{2, 4\}$

④ $\{2, 6\}$

⑤ $\{2, 4, 6\}$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 8, 10\} - \{4, 8, 10\} = \{2, 6\}$ 이다.

6. $U = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$ 에 대하여 $A = \{4, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 8, 9\}$ 일 때,

$A^c - B^c$ 은?

① $\{2\}$

② $\{2, 4\}$

③ $\{2, 9\}$

④ $\{2, 4, 8\}$

⑤ $\{2, 4, 9\}$

해설

$A^c - B^c = B - A = \{2, 4, 8, 9\} - \{4, 5, 8\} = \{2, 9\}$ 이다.

7. 다음 중 $A \cap (A - B)^c$ 과 같은 집합은?

- ① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$\begin{aligned} A \cap (A - B)^c &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

8. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$\begin{aligned} A &= 3x^2 - xy + 2y^2 \\ B &= 2x^2 + 3xy - 3y^2 \end{aligned}$$

- ① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$
④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

9. 다음은 임의의 실수 a, b 에 대하여 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 가 성립함을 증명하는 과정이다. 아래 과정에서 ㉠, ㉡, ㉢에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

증명

$$\begin{aligned} & (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= 2(\text{㉠}) \geq 0 \\ &\therefore (|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2 \\ &\text{그런데 } |a|+|b| \geq 0, |a+b| \geq 0 \text{ 이므로} \\ &|a|+|b| \geq |a+b| \text{ (단, 등호는 } (\text{㉡}), \text{ 즉 } (\text{㉢}) \text{ 일 때, 성립)} \end{aligned}$$

- ① $|a|+ab, |ab|=ab, ab \leq 0$
 ② $|a|+ab, |ab|=-ab, ab \geq 0$
 ③ $|a|-ab, |ab|=-ab, ab \leq 0$
 ④ $|a|-ab, |ab|=ab, ab \geq 0$
 ⑤ $|a|-ab, |ab|=ab, ab \leq 0$

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠} &: |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|a||b| + b^2 - a^2 - b^2 - 2ab \\ &= 2(|ab| - ab) \\ \text{㉡} &: \text{등호는 } |ab| - ab = 0 \text{ 일 때 성립} \\ &\Rightarrow |ab| = ab \\ \text{㉢} &: |ab| = ab \text{ 이려면 } ab \geq 0 \text{ 이어야 한다} \end{aligned}$$

10. 양수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 을 만족할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

그런데 $a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $1 \geq 2ab$

$$\therefore ab \leq \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{a^2} > 0, \frac{1}{b^2} > 0$ 이므로 산술평균 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{2}{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(단, 등호는 $a^2 = b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 의 최솟값은 4이다.

11. 실수 x, y, z 에 대하여 $x - y + 4z = 3\sqrt{2}$ 일 때 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

x, y, z 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $\{1 + (-1)^2 + 4^2\}(x^2 + y^2 + z^2)$
 $\geq (x - y + 4z)^2$
 $18(x^2 + y^2 + z^2) \geq (3\sqrt{2})^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$
따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최솟값은 1이다.

12. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

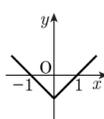
- ① $x \rightarrow x-1$
- ② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근
- ③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지
- ④ $x \rightarrow x^2-1$
- ⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

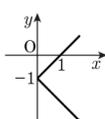
- ① $x=1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1-1=0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ② $x=2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ③ $x=4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ④ $x=1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2-1=0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

13. 다음 중 함수 $|y| = x - 1$ 의 그래프를 구하면?

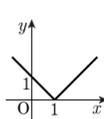
①



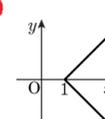
②



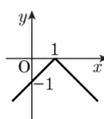
③



④

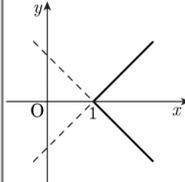


⑤



해설

$|y| = x - 1$ 에서
 $y \geq 0$ 일 때,
 $y = x - 1$
 $y < 0$ 일 때,
 $-y = x - 1, y = -x + 1$
 따라서, 그래프는 다음
 그림과 같다.



14. $x : y = 3 : 4$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수)이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하면?

- ① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x : y = 3 : 4$ 일 때, $x = \frac{3}{4}y$ 이므로

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy} = \frac{\frac{9}{16}y^2 - y^2}{\frac{9}{16}y^2 - \frac{3}{4}y^2} = \frac{7}{3}$$

$\therefore m = 3, n = 7$

15. $1 < a < 4$ 일 때, $\sqrt{(a-4)^2} + |a-1|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a-4)^2} + |a-1| \\ &= |a-4| + |a-1| \\ &= -a + 4 + a - 1 = 3 \end{aligned}$$

16. $A = \{a, b\}$ 이고, $2^A = \{X \mid X \subset A\}$ 로 정할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\{A\} = 2^A$

② $\{A\} \in 2^A$

③ $\{A\} \subset 2^A$

④ $A \subset 2^A$

⑤ $\{A\} \not\subset 2^A$

해설

2^A 는 A 의 부분집합을 원소로 하는 집합이므로

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$$

따라서 $\{A\} \subset 2^A$ 이다.

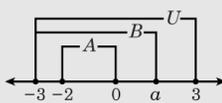
17. $U = \{x | -3 \leq x \leq 3\}$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq a\}$ 라고 할 때, $B^c \subset A^c$ 가 성립하도록 a 의 범위를 정할 때 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$B^c \subset A^c \leftrightarrow A \subset B$ 이므로 위의 그림에서 $0 \leq a \leq 3 \therefore a$ 의 최댓값은 3이다.



19. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단, $a \neq b$)

- ① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ ② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$
③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$ ④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$
⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{등호는 } a = b \text{ 일 때 성립})$$

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

20. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x + 1$ 로 정의될 때, 함수 f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 24

해설

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$f(4) = 2 \times 4 + 1 = 9 \text{ 이므로}$$

함수 f 의 치역은 $\{3, 5, 7, 9\}$

따라서, 치역의 모든 원소의 합은 $3 + 5 + 7 + 9 = 24$

21. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

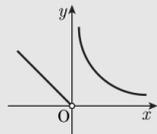
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

- I. $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$
 II. $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
 III. $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① I ② III ③ I, II ④ II, III ⑤ I, III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



I. $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$
 $= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>

II. i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로

$$f(-x) = -(-x) = x,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$$

i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

III. 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2) \text{ -<거짓>}$$

따라서 옳은 것은 I, II 이다.

22. 공집합이 아닌 두집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3, g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

23. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

24. 두 함수 $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $(g \circ f)(2) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

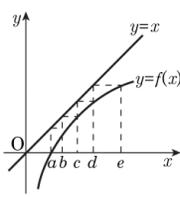
▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} (g \circ f)(2) + (g \circ f)(3) &= g(f(2)) + g(f(3)) \\ &= g(-1) + g(4) \\ &= (-1)^2 + 2 \times 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

25. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?

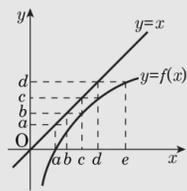
- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b)) \text{ 이므로}$$

$f^{-1}(b) = m$ 이라고 하면



$f(m) = b$ 다음 그래프에서 $f(c) = b$ 이므로 $m = f^{-1}(b) = c$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

$f^{-1}(c) = n$ 이라고 하면

$f(n) = c$ 그래프에서 $f(d) = c$ 이므로

$n = f^{-1}(c) = d$

$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$

26. 수직선 위에 세 점 A(-2), B(1), C(2)가 있다. 수직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 를 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표를 구하면?

- ① P(-2) ② P(-1) ③ P(0)
 ④ P(1) ⑤ P(2)

해설

점 P의 좌표를 P(x)라 하면

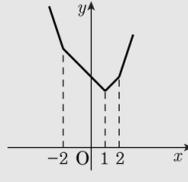
$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2|$$

$$y = |x + 2| + |x - 1| + |x - 2| \text{의}$$

그래프의 개형은

다음 그림과 같으므로 $x = 1$ 에서 최
 소값을 가진다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 P(1)
 이다.



27. 두 양수 m, n 에 대하여 $\frac{ma+nb}{m+n} = \frac{mb+nc}{m+n} = \frac{mc+na}{m+n} = 10$ 이 성립할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$$\begin{aligned} \frac{ma+nb}{m+n} &= \frac{mb+nc}{m+n} = \frac{mc+na}{m+n} \\ &= \frac{(ma+nb) + (mb+nc) + (mc+na)}{(m+n) + (m+n) + (m+n)} \\ &= \frac{m(a+b+c) + n(a+b+c)}{3(m+n)} \\ &= \frac{(m+n)(a+b+c)}{3(m+n)} = \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

따라서, $\frac{a+b+c}{3} = 10$ 이므로
 $a+b+c = 30$

28. $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{18 \cdot 20}$ 을 계산한 값은?

- ① 0 ② $\frac{9}{20}$ ③ 40 ④ $\frac{40}{9}$ ⑤ $\frac{9}{40}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) + \cdots - \frac{1}{20} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{20} = \frac{9}{40} \end{aligned}$$

29. 등식 $\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} \text{에서}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$a = 2 \text{이고 } \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이 때, } b + \frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \text{이므로 } b = 1, c = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

30. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

31. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2.\times\times\dots$$

$$\therefore x = 2, y = (\sqrt{3} + 1) - 2 = \sqrt{3} - 1$$

$$(x + 2y)^2 = (2 + 2(\sqrt{3} - 1))^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

32. 함수 $y = \frac{3}{x}$ 을 적당히 이동하였을 때 겹치지 않는 것은?

- ① $y = \frac{3}{x} + 2$ ② $y = \frac{3}{x-2}$ ③ $y = \frac{-4x+11}{x-2}$
 ④ $y = \frac{x+3}{x-1}$ ⑤ $y = \frac{2x-1}{x-2}$

해설

① $y = \frac{3}{x} + 2$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

② $y = \frac{3}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

$$\textcircled{3} \ y = \frac{-4x+11}{x-2} = \frac{-4(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 4$$

따라서 이 함수는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 y 축의 방향으로
 -4 만큼 평행이동한 것이다.

$$\textcircled{4} \ y = \frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 1$$

$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지지 않는다.

$$\textcircled{5} \ y = \frac{2(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 2$$

$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼
 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

33. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(1)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$(g \circ f)(x) = x$$

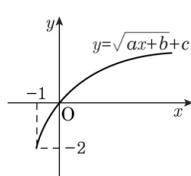
$$\Rightarrow g(f(x)) = x$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = x$$

$\therefore g(1)$ 을 구하려면, $\frac{x+2}{2x-1} = 1$ 이 되어야 한다.

$$\Rightarrow x = 3 \quad \therefore g(1) = 3$$

34. 함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의
 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼
 평행이동한 것이므로
 $y = \sqrt{ax+b} + c$
 $\Leftrightarrow y = \sqrt{a(x+1)} - 2$
 이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)} - 2$
 $\therefore \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$
 $y = \sqrt{4x+4} - 2$
 $\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$

35. x 에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m 의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는
 두 그래프 $y = \sqrt{2x}$ 와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.
 이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이
 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.
 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이
 서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,
 m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.
 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면
 $2x = m^2(x+1)^2$
 $m^2x^2 + 2(m^2-1)x + m^2 = 0$
 이 방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (m^2-1)^2 - m^4 = 0$
 $-2m^2 + 1 = 0, m^2 = \frac{1}{2}$
 $\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$
 따라서, m 의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$

36. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 5\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 5), (6, 1), (6, 5)\}$$

$$A \times C = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$$

$$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$$

$$\text{따라서 } n((A \times B) \cap (A \times C)) = 0$$

37. 세 집합 A, B, C 에 대하여
 $n(A) = 50, n(B) = 32, n(C) = 15, n(A \cup B) = 70, n(A \cap C) = 15, n(B \cap C) = 0$ 일 때,
 $n(A \cup B \cup C) + 2 \times n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$B \cap C = \emptyset$ 이므로 $A \cap B \cap C = \emptyset$ 이 된다.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$ 이고

$$A \cap B \cap C = \emptyset \text{ 이므로 } n(A \cap B) = 50 + 32 - 70 = 12$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = 50 + 32 + 15 - 15 - 12 - 0 + 0 = 70$$

따라서 정답은 $70 + 2 \times 0 = 70$

38. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c \cap B^c = \{1, 7\}$, $A^c \cap B = \{4, 6\}$ 일 때 집합 A 를 원소나열법으로 나타내면?

- ① $\{2, 3, 5\}$ ② $\{2, 3, 5, 6\}$ ③ $\{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{2, 3, 6\}$ ⑤ $\{2, 3, 7\}$

해설

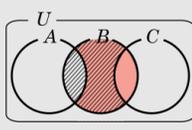
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 $A^c \cap B^c = \{1, 7\} = (A \cup B)^c$ 에서 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $A^c \cap B = \{4, 6\} = B \cap A^c = B - A$ 에서 B 에만 속하는 원소가 4, 6이므로
집합 A 의 원소는 2, 3, 5 이고 따라서 $A = \{2, 3, 5\}$ 이다.

39. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $A \subset C^c$ 이고 $n(B) = 5, n(B-A) = 4, n(B-C) = 3$ 이다. 이 때, 집합 $B - (A \cup C)$ 의 원소의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 없다.

해설

$A \subset C^c \Leftrightarrow A \cap C = \emptyset$ 이므로 다음 벤 다이어그램에서 붉게 색칠한 부분은 집합 $B-A$ 를 나타내고 빗금이 있는 부분은 집합 $B-C$ 를 나타내고 둘 다 있는 부분은 집합 $B - (A \cup C)$ 를 나타낸다.



$$n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) = 4 \therefore n(A \cap B) = 1$$

$$n(B-C) = n(B) - n(B \cap C) = 3 \therefore n(B \cap C) = 2$$

$$\text{즉, } B - (A \cup C) = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) = 5 - 1 - 2 = 2$$

40. 세 집합 $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \mid x \leq a\}$, $C = \left\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq b\right\}$ 에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기 위한 충분조건일 때, a 의 최솟값을 M , b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M - n^2$ 의 값은?

- ① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

해설

i) $C \subset A$ 조건에 만족하려면 $b \leq 6$
 $\therefore b$ 의 최댓값, $n = 6$
ii) $A \subset B$ 조건에 만족하려면 $a \geq 6$
 $\therefore a$ 의 최솟값, $M = 6 \Rightarrow 2M - n^2 = -24$

41. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재

재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$$

$$(f \circ f)(1) = (f(f(1))) = f(0) = -1$$

$$\therefore x = -1$$

42. 두 함수 $f(x) = 4x+1$, $g(x) = 2x+3$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2)$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x) = 4x+1$, $g(x) = 2x+3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ g \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \circ g \\ &= f^{-1} \circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) &= (f^{-1} \circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1) = a$ 라고 하면 $f(a) = -1$ 이므로

$$4a + 1 = -1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (g \circ (f \circ g)^{-1} \circ g)(-2) = -\frac{1}{2}$$

43. $a + \frac{1}{b} = c$, $b + \frac{1}{c} = d$, $c + \frac{1}{d} = a$ 일 때, ab 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

$c = a + \frac{1}{b}$ 을 $b + \frac{1}{c} = d$ 에 대입하면

$$d = b + \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = b + \frac{b}{ab + 1} = \frac{ab^2 + 2b}{ab + 1}$$

c 와 d 를 $a = c + \frac{1}{d}$ 에 대입하면

$$a = a + \frac{1}{b} + \frac{ab + 1}{ab^2 + 2b} \text{ 에서 } \frac{ab + 2 + ab + 1}{ab^2 + 2b} = 0$$

$$\text{즉, } \frac{2ab + 3}{ab^2 + 2b} = 0$$

따라서, $2ab + 3 = 0$ 이고, $ab = -\frac{3}{2}$ 이다.

44. 분수식 $\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

- ① $-1, 2$ ② $1, 2$ ③ $2, \frac{1}{2}$ ④ $1, \frac{1}{2}$ ⑤ $-1, \frac{1}{2}$

해설

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$

$$b+c = ak \cdots \textcircled{1}$$

$$a+c = bk \cdots \textcircled{2}$$

$$a+b = ck \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ 하면

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

i) $a+b+c \neq 0$ 이면 $k = 2$

ii) $a+b+c = 0$ 일 때 $b+c = -a$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

$\therefore k = -1, 2$

45. 다음 등식 $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

- ① $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ ③ 1.5
 ④ $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{7})$ ⑤ $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \dots}}} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2} + x} \\
 \Rightarrow x^2 &= \frac{3}{2} + x \\
 \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} &= 0 \\
 x &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \\
 x &= \frac{1 + \sqrt{7}}{2} (\because x > 0)
 \end{aligned}$$

46. 주사위 A, B 두 개를 던져서 나올 수 있는 두 자리 자연수의 집합을 A 라 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

- ① 6 ② 12 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

해설

$A = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33$
 $\dots 64, 65, 66\}$
 $n(A) = 36$

47. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 10, n(B) = 9, n(C) = 6, n(A \cap B) = 5, n(B \cap C) = 3, n(C \cap A) = 3, n(A^c \cap B \cap C) = 3$ 일 때, $n(A \cup B \cup C)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned}n(A^c \cap B \cap C) &= n((B \cap C) - A) = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 3 \\&\rightarrow n(A \cap B \cap C) = 0 \\ \therefore n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - \\&n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 10 + 9 + 6 - 5 - 3 - 3 + 0 = 14\end{aligned}$$

48. 네 명의 테니스 선수 정하, 준화, 경진, 선희가 토너먼트 경기를 하였다. 경기를 관람한 세 사람 A, B, C 에게 경기 결과를 물어 보았더니 다음과 같이 대답하였다.

A : 선희가 1 등, 경진이 3 등을 했습니다.
B : 준화가 2 등, 선희가 3 등을 했습니다.
C : 정하가 1 등, 준화가 4 등을 했습니다.

이들 모두 두 선수의 순위를 대답했지만 그 두 선수의 순위 중 하나는 옳고 하나는 틀리다고 한다. 실제 선수들의 순위를 바르게 나열한 것은?

- ① 1등: 경진, 2등: 준화, 3등: 정하, 4등: 선희
- ② 1등: 선희, 2등: 정하, 3등: 경진, 4등: 준화
- ③ 1등: 정하, 2등: 준화, 3등: 경진, 4등: 선희
- ④ 1등: 정하, 2등: 경진, 3등: 준화, 4등: 선희
- ⑤ 1등: 정하, 2등: 준화, 3등: 선희, 4등: 경진

해설

만일, 선희가 1등한 것이 참이면 준화가 2등이고 정하가 1등이니 모순이다.

그러면, 경진이 3등인 것이 참인데, 그렇게 되면 B의 대답에서 선희가 3등이라는 것이 거짓이므로 준화가 2등이고 준화가 4등인 것이 거짓이므로 정하가 1등이다.

따라서 1등은 정하, 2등은 준화, 3등은 경진, 4등은 선희가 된다.

49. x, y 가 실수일 때, 다음 중 조건 p 가 조건 q 의 필요충분 조건인 것은?

- ① $p: x+y \geq 4, q: x \geq 2$ 또는 $y \geq 2$
- ② $p: x+y$ 는 유리수, $q: x, y$ 는 모두 유리수
- ③ $p: xy > x+y > 4, q: x > 2$ 이고 $y > 2$
- ④ $p: xy+1 > x+y > 2, q: x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p: |x| > |y|, q: x > y$

해설

- ① 충분조건
- ② 필요조건
- ③ 필요조건
- ⑤ 아무 조건 아님

50. 대열의 길이가 5km인 부대가 일정한 속도로 걸어서 이동하고 있다. 이 때 부대의 맨 끝에서 말을 타고 있던 전령이 이 부대의 맨 앞에 있는 장군에게 긴급히 전해줄 편지가 있었다. 이 전령은 말을 타고 일정한 속도로 부대가 이동하는 방향을 따라 신속히 부대의 맨 앞의 장군에게 편지를 전해주고 바로 반대 방향으로 이동해 부대의 맨 끝으로 왔다. 그 동안에 대열 전체는 5km를 이동했다고 할 때, 이 전령이 움직인 거리는? (단, $\sqrt{2} = 1.414$)

- ① 약 10.4km ② 약 11.5km ③ 약 12.1km
 ④ 약 12.6km ⑤ 약 13.2km

해설

부대의 이동 속도를 1, 전령의 이동 속도를 v
 전령이 부대 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간을 t_1
 부대 뒤로 되돌아오는 데 걸리는 시간을 t_2 라 하면

$$\begin{cases} vt_1 = 5 + 1 \cdot t_1 \cdots \text{㉠} \\ vt_2 = 5 - 1 \cdot t_2 \cdots \text{㉡} \\ 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 = 5 \end{cases}$$

㉠ - ㉡에서 $v(t_1 - t_2) = t_1 + t_2 = 5 \cdots \text{㉢}$

㉠ + ㉡에서 $v(t_1 + t_2) = 10 + (t_1 - t_2)$

$\therefore 5v = 10 + (t_1 - t_2) \cdots \text{㉣} (\because \text{㉢에서})$

㉢, ㉣에서 $v(5v - 10) = 5$

$v^2 - 2v - 1 = 0, v = 1 + \sqrt{2} (\because v > 1)$

(전령이 움직인 거리) = $v(t_1 + t_2)$
 $= 5(1 + \sqrt{2})$
 $= 5 \times 1 + 5 \times 2.414$
 $= 12.07$

따라서 약 12.1km를 전령이 움직였다.

해설

부대의 이동 속도를 a , 전령의 이동 속도를 b 라 하면

부대가 5km 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{a}$

전령이 부대의 맨 앞까지 이동하는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b-a}$

전령이 부대의 맨 뒤로 되돌아오는 데 걸리는 시간은 $\frac{5}{b+a}$ 이다.

$\frac{5}{b-a} + \frac{5}{b+a} = \frac{5}{a}$ 에서

$b = (1 + \sqrt{2})a$

\therefore (전령이 움직인 거리) = $(1 + \sqrt{2})a \cdot \frac{5}{a} \approx 5 \times 2.414 = 12.07$

따라서 약 12.1km를 전령이 움직였다.