1. -64의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-4,\ 2+2\sqrt{3}i,\ 2-2\sqrt{3}i$

해설

-64의 세제곱근은 $x^3=-64$를 만족하는 x의 값이므로
$x^3+64=0$에서
$(x+4)(x^2-4x+16)=0$
$\therefore\ x+4=0$ 또는 $x^2-4x+16=0$
$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=2+2\sqrt{3}i$ 또는 $x=2-2\sqrt{3}i$
따라서 -64의 세제곱근은
$-4,\ 2+2\sqrt{3}i,\ 2-2\sqrt{3}i$

2. $\sqrt[3]{(-2)^3} + \sqrt[4]{(-3)^4}$을 간단히 하면?

① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$-2+3=1$

3. $a>0, b>0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$$
$$= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}$$
$$= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

4. 다음 식을 간단히 하면?(단, $a > 0$)

$$(a^5)^2 \div (a^2)^{-4}$$

① a^3 ② a^{18} ③ a^{21} ④ $\frac{1}{a^3}$ ⑤ $\frac{1}{a^6}$

해설

$(a^5)^2 \div (a^2)^{-4} = a^{10} \div a^{-8}$
$= a^{10-(-8)} = a^{18}$

5. $x = 2$ 일 때, $x^{x^{x^x}}$ 의 값을 구하면?

① 2^2 ② 2^4 ③ 2^8 ④ 2^{16} ⑤ 2^{32}

해설

$$x^{x^{x^x}} = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

6. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$ 이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}$

$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

$n = 7,\ m = 8$

$8 - 7 = 1$

7. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=2^{p}\cdot 3^{q}$ 일 때, $p+q$ 의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$$\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$=\sqrt[3]{3^{3}\cdot 3}+\sqrt[3]{2^{3}\cdot 3}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot 3}$$

$$=3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$$

$$=\left(3+2+\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt[3]{3}=2^{4}\cdot 3^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore p=4,\ q=-\frac{2}{3} \qquad \therefore p+q=\frac{10}{3}$$

8. 다음 중 계산 결과가 다른 하나는?

① $(-100)^0$　　② $a^2 \times a \div a^3$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3}$　　④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}}$

해설

① $(-100)^0 = 1$

② $a^2 \times a \div a^3 = a^{2+1-3} = a^0 = 1$

③ $\dfrac{3^3 \div 3^2}{3} = \dfrac{3^{3-2}}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

④ $a^{-\sqrt{3}} \times (a^3)^{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{a^{2\sqrt{3}}}$

$= a^{-\sqrt{3}} \times a^{3\sqrt{3}} \times a^{-2\sqrt{3}}$

$= a^{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}} = a^0 = 1$

⑤ $a^{\sqrt{2}} \times \dfrac{a^3}{a^{3\sqrt{2}}} = a^{\sqrt{2}} \times a^3 \div a^{3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}+3-3\sqrt{2}} = a^{3-2\sqrt{2}}$

9. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$ ㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$

$\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ $\therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}}$ $\therefore$ 거짓

10. 실수 a, b, c, d에 대하여 $2^a = c$, $2^b = d$일 때, 4^{a+b}와 같은 것은?

① $\dfrac{1}{cd}$ ② $\dfrac{1}{2cd}$ ③ $\dfrac{1}{c^2d}$ ④ cd ⑤ c^2d^2

해설

$4^{a+b} = (2^2)^{a+b} = 2^{2a} \cdot 2^{2b} = (2^a)^2 \cdot (2^b)^2 = c^2d^2$

11. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3 ② $\sqrt{3}$ ③ 5 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

12. 서로소인 두 자연수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a+b=13$이다.

13. $a > 0, a \neq 1$ 일 때, $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}} = a^k$ 을 만족시키는 유리수 k의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}}$$

$$= \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{1}{4}}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}}}$$

$$= \sqrt[3]{a \cdot \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{5}{12}}} \times \sqrt[3]{(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}}$$

$$= (a^{\frac{17}{12}})^{\frac{1}{3}} \times (a^{\frac{1}{12}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{17}{36}+\frac{1}{36}} = a^{\frac{18}{36}} = a^{\frac{1}{2}}$$

14. $\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$ 의 값은?

① 20　② $\sqrt{401}$　③ $\sqrt{402}$　④ $\sqrt[4]{401}$　⑤ $\sqrt[4]{402}$

해설

$$\sqrt[4]{402+2\sqrt{401}}\cdot\sqrt[4]{402-2\sqrt{401}}$$
$$=\sqrt[4]{(\sqrt{401}+1)^2}\cdot\sqrt[4]{(\sqrt{401}-1)^2}$$
$$=\sqrt{\sqrt{401}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{401}-1}=\sqrt{401-1}=20$$

15. 세 수 $A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$의 대소를 비교하면?

① $A > B > C$ ② $B > A > C$ ③ $C > B > A$

④ $A > C > B$ ⑤ $B > C > A$

해설

$A = \sqrt[3]{4},\ B = \sqrt[4]{6},\ C = \sqrt[6]{13}$을 거듭 제곱꼴로 고쳤을 때, 밑과 지수가 모두 다르므로

지수를 통일한 다음 밑이 큰 순서로 대소를 비교한다.

$3, 4, 6$의 최소공배수가 12이므로

$A = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$

$B = \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$

$C = \sqrt[6]{13} = \sqrt[12]{13^2} = \sqrt[12]{169}$

$\therefore A > B > C$

16. $3^{\frac{5}{2}} \cdot \left(9^{\frac{7}{4}} + 27^{\frac{3}{2}}\right) \cdot 81^{-\frac{3}{2}}$ 를 계산하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$3^{\frac{5}{2}} \cdot 9^{\frac{7}{4}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 27^{\frac{3}{2}} \cdot 81^{-\frac{3}{2}}$$
$$= 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{7}{2}} \cdot 3^{-6} + 3^{\frac{5}{2}} \cdot 3^{\frac{9}{2}} \cdot 3^{-6}$$
$$= 3^{\frac{5}{2}+\frac{7}{2}-6} + 3^{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}-6} = 3^0 + 3^1 = 1 + 3 = 4$$

17. $x=\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　② $\sqrt{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\sqrt[4]{2}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

④ $\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$　⑤ $\sqrt[8]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$

해설

$$x^2+4=2^{\frac{1}{4}}+2+2^{-\frac{1}{4}}=\left(2^{\frac{1}{8}}+2^{-\frac{1}{8}}\right)^2$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+4}=2^{\frac{1}{8}}+2^{-\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{2}+\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$$

18. $2^6 = a,\ 9^4 = b$일 때, 12^5를 $a,\ b$에 관한 식으로 나타내면?

① $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{5}{8}}$ ② $a^{\frac{5}{4}}b^{\frac{5}{4}}$ ③ $a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{8}}$ ④ $a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{8}}$ ⑤ $a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{3}{2}}$

해설

$2^6 = a$에서 $2 = a^{\frac{1}{6}}$

$9^4 = b$에서 $(3^2)^4 = 3^8 = b$

$\therefore 3 = b^{\frac{1}{8}}$

$\therefore\ 12^5 = (2^2 \times 3)^5 = 2^{10} \times 3^5 = (a^{\frac{1}{6}})^{10} \times (b^{\frac{1}{8}})^5 = a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{8}}$

19. $11^x = 25$, $275^y = 125$ 일 때, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y}$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(11^x)^{\frac{1}{x}} = (25)^{\frac{1}{x}}$ 에서 $5^{\frac{2}{x}} = 11$

$(275^y)^{\frac{1}{y}} = (5^3)^{\frac{1}{y}}$ 에서 $5^{\frac{3}{y}} = 275$ 이므로

$5^{\frac{2}{x}} \div 5^{\frac{3}{y}} = 11 \div 275 = \dfrac{1}{25}$

$5^{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}} = 5^{-2}$, $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -2$

20. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I인 지진의 진도 R을 다음과 같이 정의하였다.

$R = \log\dfrac{I}{I_0}$(단, I_0는 표준지진의 강도)

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

① 1.4배 ② 2배 ③ $\sqrt{10}$배

④ 10배 ⑤ 100배

해설

진도가 4.8, 6.8일 때의 지진의 강도를 각각 I_1, I_2라 하면

$4.8 = \log\dfrac{I_1}{I_0}$, $6.8 = \log\dfrac{I_2}{I_0}$ 이므로

$\therefore\ \log\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100$(배)

21. 다음 중 옳은 것은?

① $a>0$ 이고 $m, n(m>0, n>0)$ 이 정수일 때, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

② $a>0$ 일 때, $(\sqrt[3]{-a})^3 = -a$ 이다.

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m+n]{a}$ (단, $a>0$)

해설

① $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 ± 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt[n]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m+n]{a} = \sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{a}$

22. 다음 세 수 $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{6}$의 대소관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2} > \sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{6}$　　② $\sqrt{2} > \sqrt[6]{6} > \sqrt[4]{5}$

③ $\sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6}$　　④ $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{6} > \sqrt{2}$

⑤ $\sqrt[6]{6} > \sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$

해설

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}}$이므로 각 수를 12제곱 한다.

$(\sqrt{2})^{12} = (2^{\frac{1}{2}})^{12} = 2^6 = 64$

$(\sqrt[4]{5})^{12} = (5^{\frac{1}{4}})^{12} = 5^3 = 125$

$(\sqrt[6]{6})^{12} = (6^{\frac{1}{6}})^{12} = 6^2 = 36$

$125 > 64 > 36$이므로

$\sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \sqrt[6]{6}$

23. $a^3 = 3 - 2\sqrt{2}$일 때, $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-2} - a^{-\frac{1}{2}}} + \dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2 + a^{\frac{1}{2}}}$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ $2(\sqrt{2} - 1)$

④ $2(\sqrt{2} + 1)$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$a^3 = 3 - 2\sqrt{2}$일 때,

$a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-2} - a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2 + a^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{(a^{-2} - a^{-\frac{1}{2}})a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}}{(a^2 + a^{\frac{1}{2}})a^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^{-\frac{3}{2}} - 1} + \frac{1}{a^{\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1 + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1 + 1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

24. 함수 $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ (단, $a \neq 1$ 인 양수) 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

a가 $1+\sqrt{3}$의 세제곱근 중 실수인 값이라 할 때, 등식 $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = p+q\sqrt{3}$을 만족하는 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$이므로 $a^3 = 1+\sqrt{3}$이다.

$f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{1+\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}+1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$
$$= -3+2\sqrt{3}$$

$\therefore\ p+q = -3+2 = -1$

25. 다음은 한 변의 길이가 n인 정사각형을 세 부분으로 나눈 각각의 넓이가 2^4, 2^7, 2^m일 때, $m+n$의 값을 구하는 과정이다. (단, m, n은 자연수)

> 세 부분의 넓이의 합은 n^2이므로 $2^4+2^7+2^m=n^2$
> 한편, $2^4+2^7=2^4(1+2^3)=12^2$이므로
> $2^m=n^2-12^2=(n-12)(n+12)$
> 이때, $n-12=2^k$(k는 정수)$\cdots$㉠
> 으로 놓으면
> $n+12=2^{m-k}\cdots$㉡
> ㉡−㉠을 하면 $24=2^k(2^{m-2k}-1)$
> $\therefore\ 2^k=$[(가)], $2^{m-2k}-1=$[(나)]
> 따라서, $m+n=$[(다)]이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : 2, (나) : 12, (다) : 20

② (가) : 4, (나) : 6, (다) : 28

③ (가) : 4, (나) : 6, (다) : 32

④ (가) : 8, (나) : 3, (다) : 28

⑤ (가) : 8, (나) : 3, (다) : 32

해설

세 부분의 넓이의 합은 n^2이므로
$2^4+2^7+2^m=n^2$
한편, $2^4+2^7=2^4(1+2^3)=2^4\cdot 3^2=12^2$이므로
$2^m=n^2-12^2=(n-12)(n+12)$
이때, $n-12=2^k$(k는 정수)$\cdots$ ㉠
$2^m=2^k(n+12)$에서
$n+12=2^{m-k}\ \cdots$ ㉡
㉡−㉠을 하면
$24=2^{m-k}-2^k=2^k(2^{m-2k}-1)$
즉, $2^k(2^{m-2k}-1)=2^3\cdot 3$이고, 2^k은 짝수, $2^{m-2k}-1$은 홀수이므로
$2^k=\boxed{8(가)}$, $2^{m-2k}-1=\boxed{3(나)}$
$\therefore\ k=3,\ m=8$
㉠에서 $n=12+2^3=20$이므로 $m+n=\boxed{28(다)}$이다.