

1. 어떤 수 A 를 8 로 나누었더니 몫이 9 이고, 나머지가 3 이었다. 어떤 수 A 는?

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90

해설

$$A = 8 \times 9 + 3 = 75$$

2. 6의 약수의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 6개

해설

6의 약수는 1, 2, 3, 6이다.
따라서 4개다.

3. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① 9 는 9 의 약수이다.
- ② 8 은 8 의 배수이다.
- ③ 1 은 모든 자연수의 배수이다.
- ④ 276 은 6 의 배수이다.
- ⑤ 364 는 7 의 배수이다.

해설

1 은 모든 자연수의 약수이다.

4. 다음 중 3^4 을 나타낸 식은?

① 3×4

② $3 + 3 + 3 + 3$

③ $4 \times 4 \times 4$

④ $3 \times 3 \times 3 \times 3$

⑤ 4×3

해설

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ 이다.

5. 다음을 만족하는 a, b 의 값을 각각 구하면?

$5^3 = a, 7^b = 49$

- ① $a = 25, b = 1$

② $a = 25, b = 2$

③ $a = 125, b = 1$

④ $a = 125, b = 2$

⑤ $a = 125, b = 3$

해설

$5^3 = 125, 7^2 = 49$ 이므로 $a = 125, b = 2$ 이다.

6. 다음 중 옳은 것은?

- ① 0 은 모든 자연수의 약수이다.
- ② 합성수의 약수는 4 개 이상이다.
- ③ 소수가 아닌 자연수는 모두 합성수이다.
- ④ 소수의 약수는 1 과 자기 자신뿐이다.
- ⑤ 소수는 홀수이다.

해설

소수는 1 보다 큰 자연수 중에서 1 과 자기 자신만을 약수로 가지는 수이다.

7. 63를 소인수분해 한 것으로 옳은 것은?

① 7×9

② 2^6

③ $3^2 \times 7$

④ $2^2 \times 3 \times 5$

⑤ $2^6 \times 9$

해설

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 63} \\ 3 \overline{) 21} \\ 7 \end{array}$$

8. $3^2 \times 5 \times 7$ 에 자연수 a 를 곱하면 어떤 자연수의 제곱인 수가 된다. a 의 최솟값은?

① 5

② 7

③ 15

④ 21

⑤ 35

해설

$3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱인 수가 되려면 $3^2 \times 5 \times 7 \times a$ 를 소인수분해했을 때 각 소인수의 지수가 짝수여야 한다. 따라서 만족하는 자연수 a 의 최솟값은 $5 \times 7 = 35$ 이다.

9. 28 과 약수의 개수가 같은 수는?

① 24

② 70

③ 49

④ 72

⑤ 63

해설

$28 = 2^2 \times 7$ 이므로

약수의 개수는 $(2 + 1) \times (1 + 1) = 6$ 개

① $24 = 2^3 \times 3$ 이므로 $4 \times 2 = 8$ (개)

② $70 = 2 \times 5 \times 7$ 이므로 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

③ $49 = 7^2$ 이므로 3 (개)

④ $72 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 $4 \times 3 = 12$ (개)

⑤ $63 = 3^2 \times 7$ 이므로 $3 \times 2 = 6$ (개)

10. 자연수 $2^3 \times 3^a$ 의 약수의 개수가 12 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(3 + 1)(a + 1) = 12$$

$$a + 1 = 3$$

$$\therefore a = 2$$

11. 어떤 자연수 x 를 7 로 나누었더니 몫이 6 이고, 나머지는 4 보다 큰 소수였다. 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$x = 7 \times 6 + y$ ($0 \leq y < 7$) 이고 y 는 4 보다 큰 소수이므로 $y = 5$ 가 되어 $x = 7 \times 6 + 5 = 47$ 이다.

12. 다음 세 자리 수는 3의 배수이다. 안에 들어갈 알맞은 숫자를 모두 구하여라.

28

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : 8

해설

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로

$$2 + \square + 8 = 10 + \square$$

$$\therefore \square = 2, 5, 8$$

13. 다음 중 옳은 것은?

① $2^3 = 6$

② $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 12$

③ $2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 7^2 = 4 \times 49 = 196$

④ $\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

⑤ $\frac{1}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5} = \frac{1}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{1}{60}$

해설

① $2^3 = 8$

② $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$

④ $\frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

⑤ $\frac{1}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5} = \frac{1}{2^2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{900}$

14. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 가장 작은 소수는 1 이다.
- ㉡ 소수는 약수가 2 개인 수이다.
- ㉢ 자연수는 소수와 합성수로 이루어져 있다.
- ㉤ a, b 가 소수이면 $a \times b$ 도 소수이다.

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉡
- ④ ㉢, ㉤
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉤

해설

㉠ 가장 작은 소수는 2 이다.
㉢ 자연수는 1, 소수, 합성수로 이루어져 있다.
㉤ a, b 가 소수일 때, $a \times b$ 의 약수는 1, $a, b, a \times b$ 이므로 $a \times b$ 는 소수가 아니다.
따라서 옳은 것은 ㉡이다.

15. 180의 소인수와 220의 소인수 중 공통인 소인수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2개

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$,
 $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ 이므로
180의 소인수는 2, 3, 5 ,
220의 소인수는 2, 5, 11 이므로
공통인 소인수는 2, 5 이므로 2개이다.

16. 28 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$28 \times a = b^2 \text{ 에서}$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$a = 7$$

$$2^2 \times 7 \times 7 = b^2$$

$$2^2 \times 7^2 = b^2$$

$$b = 2 \times 7 = 14$$

17. 48 에 어떤 수 x 를 곱하여 자연수의 제곱이 되도록 하려 한다. 이러한 x 중 두 번째로 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로

가장 작은 $x = 3$

두 번째로 작은 수는 $2^2 \times 3 = 12$

18. 72에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 12$

해설

$$72 \times a = b^2 \text{ 에서}$$

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$a = 2$$

$$2^3 \times 3^2 \times 2 = b^2$$

$$2^4 \times 3^2 = b^2$$

$$b = 2^2 \times 3 = 12$$

19. 다음은 희망이의 수학일기 중 일부이다. 밑줄 친 부분 중 틀린 부분을 기호로 써라.

오늘은 수학시간에 수의 약수의 개수를 구할 때, 직접 그 수의 약수를 모두 구하지 않고도 소인수분해만을 이용하여 약수의 개수를 구하는 방법을 배웠다. 소인수분해만 구하면 약수의 개수를 구할 수 있다니! 정말 신기하다!! 그럼 오늘 배운 내용을 복습해 볼까.
문제) 98 의 약수의 개수 구하기
풀이) ㉠먼저 98 을 소인수분해하면 $98 = 2 \times 7^2$ 이다.
㉡ 약수의 개수를 구할 때는, 각 지수에 1을 더하여 곱한다.
㉢ 따라서 98 의 약수의 개수는 $(0 + 1) \times (2 + 1) = 3$ (개) 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ 98 을 소인수분해하면 $98 = 2 \times 7^2$ 이다. 한편 2와 7^2 의 지수는 각각 1,2 이므로 98 의 약수의 개수는 $(1 + 1) \times (2 + 1) = 6$ (개) 이다.

20. 다음 중 약수의 개수가 다른 것은?

- ① $2^3 \times 3^2$
- ② 11^{11}
- ③ $3^2 \times 5 \times 7^2$
- ④ 5×7^5
- ⑤ $2 \times 3 \times 7^2$

해설

- ① $(3 + 1) \times (2 + 1) = 4 \times 3 = 12$ (개)
- ② $11 + 1 = 12$ (개)
- ③ $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 3 \times 2 \times 3 = 18$ (개)
- ④ $(1 + 1) \times (5 + 1) = 2 \times 6 = 12$ (개)
- ⑤ $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (2 + 1) = 2 \times 2 \times 3 = 12$ (개)

21. $2^3 \times 7^2 \times a^2 \times b$ 의 약수의 개수는 모두 몇 개인지 구하여라.
(단, a, b 는 2, 7을 제외한 소수이다.)

▶ 답: 개

▶ 정답 : 72 개

해설

$$(3+1) \times (2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 72(\text{개})$$

22. 소인수가 2개인 어떤 자연수가 있다. 이 자연수를 소인수분해한 결과 $\square \times 5^4$ 이고, 약수의 개수가 20개 일 때, 가장 작은 자연수이다.

$\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\square \times 5^4$ 에서 $\square = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(x+1) \times (4+1) = 20$ (개) 이므로

$$(x+1) \times (4+1) = (x+1) \times 5 = 20$$

$$x+1 = 4 \quad \therefore x = 3$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^3 = 8$$

23. 1 부터 200 까지의 자연수 중에서 약수의 개수가 3 개인 자연수는 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

자연수 n 의 약수의 개수가 3 개이기 위해서는
1 과 n 이외에 약수가 한 개만 더 있어야하므로
자연수 n 은 소수의 완전제곱수이어야 한다.
따라서 1 부터 200 까지의 완전제곱수를 구하면
 $13^2 = 169 < 200$ 이고 $17^2 = 289 > 200$ 이므로
200 이하인 소수의 완전제곱수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2$ 이다.

24. 소수 97 은 각 자리의 숫자를 바꾸면 79 가 되어 역시 소수가 된다. 이처럼 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 50 보다 작은 두 자리의 소수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

▷ 정답 : 13

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 31

▷ 정답 : 37

해설

에라토스테네스의 체를 이용하여 50 보다 작은 두 자리 소수를 구하면 다음과 같다.

10 (11) 12 (13) 14 15 16 (17) 18 (19)
20 21 22 (23) 24 25 26 27 28 (29)
30 (31) 32 33 34 35 36 (37) 38 39
40 (41) 42 (43) 44 45 46 (47) 48 49

이 중 각 자리의 숫자를 바꾸어도 소수가 되는 수를 찾아 적으면 11, 13, 17, 31, 37 이다.

25. 13 이하의 자연수의 곱을 소인수분해 했을 때 소인수의 합을 a , 소인수의 지수의 합을 b 라 하자. 이때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 13 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \\ &\quad \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \\ &= 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 \\ &a = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 41 \\ &b = 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 20 \\ &\therefore a - b = 41 - 20 = 21 \end{aligned}$$

26. 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 x 의 값을 모두 구하면?

① 1, 4

② 4, 5

③ 5, 20

④ 4, 5, 20

⑤ 1, 2, 4, 5, 20

해설

$\frac{2^2 \times 5}{x} = y^2$ 을 만족하는 자연수 x 는 $5, 5 \times 2^2$ 이다.

27. $96a = b^3$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 18$

▷ 정답 : $b = 12$

해설

$$96a = 2^5 \times 3 \times a = b^3$$

지수가 3 의 배수가 되도록 작은 수를 곱해주어야 한다.

$$\therefore a = 2 \times 3^2 = 18$$

$$2^6 \times 3^3 = (2^2 \times 3)^3 = 12^3$$

$$\therefore b = 12$$

28. 720 의 약수가 아닌 것은?

① $2^3 \times 3 \times 5$

② 2×5

③ $3^2 \times 5$

④ $2^4 \times 3^3$

⑤ 2×3^2

해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이므로 720 의 약수는 $(2^4 \text{ 의 약수}) \times (3^2 \text{ 의 약수}) \times (5 \text{ 의 약수})$ 이다.

29. 두 자연수 x, y 에 대하여 $2^x \times 3 \times 5^y$ 의 약수의 개수가 36일 때, $x+y$ 의 값으로 알맞은 것을 모두 구하면?

① 5

② 7

③ 9

④ 11

⑤ 13

해설

$$(x+1) \times (1+1) \times (y+1) = 36$$

$$(x+1) \times (y+1) = 18$$

$$18 = 2 \times 9 \text{ 또는 } 18 = 3 \times 6 \text{ 이므로}$$

$$x+1=2, y+1=9 \text{ 또는 } x+1=9, y+1=2 \text{ 일 때,}$$

$$x=1, y=8 \text{ 또는 } x=8, y=1$$

$$\text{그러므로 } x+y=9$$

$$x+1=3, y+1=6 \text{ 또는 } x+1=6, y+1=3 \text{ 일 때,}$$

$$x=2, y=5 \text{ 또는 } x=5, y=2$$

$$\text{그러므로 } x+y=7$$

30. $16 \times A$ 의 약수의 개수가 10 개일 때, A 의 값 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

16을 소인수분해하면 $16 = 2^4$ 이다. $A = a^x$ 라고 하면 $16 \times A = 2^4 \times a^x$ 의 약수의 개수는 $(4 + 1) \times (x + 1) = 10$ (개)이므로 $x + 1 = 2$, $x = 1$ 이다.

한편 $a = 2$ 이면 $16 \times A = 2^4 \times 2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $a \neq 2$ 인 가장 작은 소수이어야 하므로 $a = 3$, $x = 1$ 이다. 따라서 A 의 값은 3이다.

31. 일곱 자리 수 $1706xy2$ 가 8 의 배수도 되고 9 의 배수도 된다. 이 때, $x + y$ 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 11

해설

어떤 수가 8 의 배수라면 마지막 세 자리가 000 또는 8 의 배수이고,
어떤 수가 9 의 배수라면 각 자리의 수를 더한 값이 9 의 배수이다.
 $1706xy2$ 가 8 의 배수가 되려면 $xy2$ 가 8 의 배수이어야 한다.
 $1 + 7 + 0 + 6 + x + y + 2$ 가 9 의 배수가 되려면 $x + y$ 가 2, 11 이어야 한다.
두 조건으로 순서쌍 (x, y) 를 구해 보면,
 $\therefore (x, y) = (1, 1), (4, 7), (8, 3)$
 $\therefore x + y = 2, 11$

32. 다음 주어진 수 중에서 소인수가 다르는 것은?

① 144

② 216

③ 72

④ 96

⑤ 98

해설

① $2^4 \times 3^2$

② $2^3 \times 3^3$

③ $2^3 \times 3^2$

④ $2^5 \times 3$

⑤ 2×7^2

- 33.** a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다.
 x 는 1 이상 100 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 4개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
(소수)² 이므로
100 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 4 개