

1. 분수함수 $y = \frac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$y = \frac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x = -\frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$ 이므로
주어진 분수함수의 점근선은 $x = 2$, $y = -3$ 이다.
 $\therefore 2 + (-3) = -1$

2. 함수 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m, n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$y = \frac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m = 3, n = 1$

$$m + n = 4$$

3. $y = \frac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 1$, $y = -2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = \frac{3-ax}{1-x} = \frac{ax-3}{x-1} = \frac{a-3}{x-1} + a$$

이 분수함수의 점근선은 $x = 1$, $y = a$

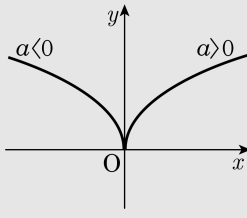
$$\therefore a = -2$$

4. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.
- ② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.
- ③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.
- ④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.
- ⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때의 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수 있다.
그러나 $a > 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$
 $a < 0$ 일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$ 이므로
①은 틀린 것이다.

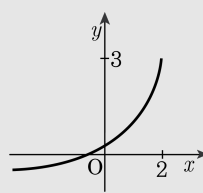


5. 무리함수 $y = -\sqrt{-2(x-2)} + 3$ 가 지나는 모든 사분면은?

- ① 1, 2 사분면
- ② 1, 4 사분면
- ③ 1, 2, 3 사분면
- ④ 2, 3, 4 사분면
- ⑤ 1, 3, 4 사분면

해설

꼭지점이 (2,3)이고 (0,1)을 지나므로
∴ 1,2,3 사분면을 지난다.



6. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$f(x) = \sqrt{x-2} + 2, g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$$

7. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = a \text{라 하면}$$

$$(f \circ g)(a) = \frac{1}{4} \text{이고}$$

$$f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)}) = \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4,$$

$$\sqrt{3(a-1)} = 3$$

$$3(a-1) = 9, a-1 = 3, a = 4$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

8. 함수 $y = \frac{ax+b}{2x+c}$ 가 점 (1,2) 를 지나고 점근선이 $x = 2, y = 1$ 일 때,
 $a + b + c$ 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -4 ④ -2 ⑤ 0

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{k}{x-2} + 1$$

또 점 (1,2)를 지나므로

$$2 = \frac{k}{1-2} + 1 \quad \therefore k = -1$$

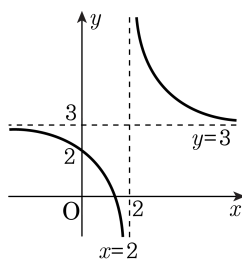
$$\therefore y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{-1}{x-2} + 1 = \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-6}{2x-4}$$

$$\therefore a = 2, b = -6, c = -4$$

$$\therefore a + b + c = -8$$

9. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2, y=3$ 일 때, 상수 a, b, c 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① -6 ② -4 ③ -3
 ④ 2 ⑤ 7



해설

점근선이 $x=2, y=3$ 이므로 $a=3, c=-2$

점 $(0, 2)$ 를 지나므로 $\frac{b}{c} = 2$

$\therefore b = -4$

$\therefore a+b+c = -3$

10. 다음과 같은 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = \emptyset$ 일때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

$$A = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{|x-1|}{x} \right\}$$
$$B = \left\{ (x, y) \mid y = ax \right\}$$

- ① $a < 0$

② $a > 0$

③ $0 < a < 1$
- ④ $0 \leq a \leq 1$

⑤ $a < 0, a > 1$

해설

$y = \frac{|x-1|}{x}$ 에서
 $x \geq 1$ 일 때,
 $y = \frac{x-1}{x} = -\frac{1}{x} + 1$
 $x < 1$ 일 때, $y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

$A \cap B = \emptyset$ 이려면 위의 곡선과 원점을 지나는 직선 $y = ax$ 가 만나지 않아야 하므로,
위쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만 존재해야 한다.
따라서 구하는 a 의 값의 범위는 $a < 0$

11. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

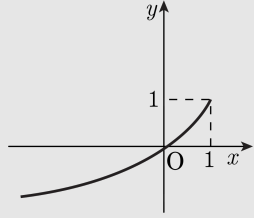
보기

- ㉠ $a = -1$ 이면 그래프는 제2사분면을 지난다.
- ㉡ $a > 0$ 이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.
- ㉢ $a < 0$ 이면 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.
- ㉤ $y = \sqrt{x} + 1$ 의 그래프와 만날 수 있다.

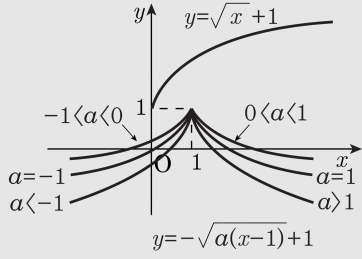
- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉤ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉤

해설

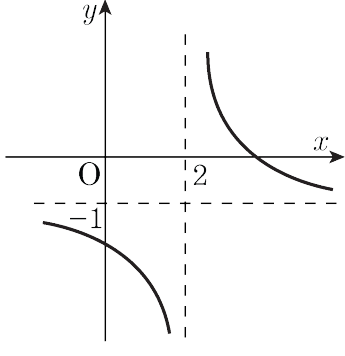
㉠ $a = -1$ 이면 주어진 무리함수는 $y = -\sqrt{-(x-1)} + 1$
 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,
 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a > 0$ 또는 $a < 0$ 일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \geq 0$ 이므로 치역은 $\{y|y \leq 1\}$
㉤ $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$ 의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x} + 1$ 의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



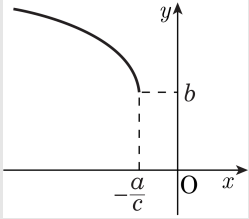
12. 분수함수 $y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y = \sqrt{cx+a}+b$ 의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



- ① 제1사분면
- ② 제2사분면
- ③ 제3사분면
- ④ 제4사분면
- ⑤ 제1,2사분면

해설

$y = \frac{b}{x+a} + c$ 의 점근선은 $x = -a, y = c$
그림에서 $-a > 0, c < 0$ 이고, $b > 0$
 $\therefore a < 0, b > 0, c < 0 \cdots \text{㉠}$
한편 $y = \sqrt{cx+a}+b = \sqrt{c\left(x+\frac{a}{c}\right)}+b$ 이므로
 $c\left(x+\frac{a}{c}\right) \geq 0$
이때 $c < 0$ 이므로 $x \leq -\frac{a}{c}$
㉠에서 $-\frac{a}{c} < 0$ 이므로 $x < 0$
또 $y = \sqrt{cx+a}+b \geq b$
따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

13. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a + p + q$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

정의역은 $\{x \mid a(x-p) \geq 0\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0$, $p = 3$
치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$ 이므로 $q = 4$

$$\therefore f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$$

이때, $f(1) = 6$ 이므로

$$\sqrt{-2a} + 4 = 6, \sqrt{-2a} = 2, -2a = 4$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$$

14. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2 (x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$ 이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x-1$

$\therefore x = y^2 - 4y + 5 (y \geq 2)$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

15. 함수 $y = \sqrt{x+|x|}$ 와 직선 $y = x+k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < k < 0$ ② $-1 < k \leq 0$ ③ $0 < k < \frac{1}{2}$
 ④ $0 \leq k < \frac{1}{2}$ ⑤ $0 < k \leq \frac{1}{2}$

해설

$x \geq 0$ 일 때 $y = \sqrt{2x}$ 이고 $x < 0$ 일 때

$y = 0$ 이므로

$y = \sqrt{x+|x|}$ 의 그래프는

그림과 같고 직선 $y = x+k$ 와 서로 다른

세 점에서 만나려면

(i)과 (ii) 사이에 존재해야 한다.

① 곡선 $y = \sqrt{2x}$ 와 직선 $y = x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{2x} = x+k$ 에서 $2x = (x+k)^2$

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$

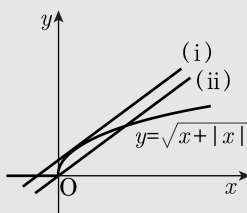
이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = 0, \quad -2k+1=0$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

② 직선 $y = x+k$ 가 원점을 지날 때 $k = 0$

①, ②에서 구하는 k 의 값의 범위는 $0 < k < \frac{1}{2}$

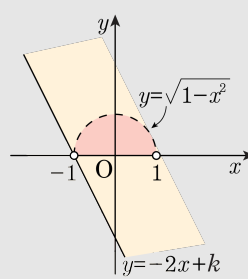


16. $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y < \sqrt{1-x^2}\}$, $B = \{(x, y) \mid 2x+y > k\}$ 에서 $A \cap B = A$ 가 되게 하는 k 의 범위를 구하면?

- ☒ ① $k \leq -2$ ② $k < -2$ ③ $k > -2$
 ④ $k \geq -2$ ⑤ $k \neq -2$

해설

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ 이므로
 그림을 그려 부등식의 영역으로 표시하면
 집합 B 에서 $y > -2x + k$ 이므로
 점 $(-1, 0)$ 를 지날 때, $k = -2$ 이다.
 따라서, $A \subset B$ 이려면 $k \leq -2$



17. 분수함수 $y = \frac{1}{x-2} + 1 (x > 2)$ 의 그래프 위의 한 점 $P(x, y)$ 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

위 그림에서 $\overline{PA} = y = \frac{1}{x-2} + 1$ $\overline{PB} = x(x > 2)$

$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = x + \frac{1}{x-2} + 1 = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 3$

$\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{1}{x-2}} + 3 = 5$

(단, 등호는 $x - 2 = \frac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

18. $x^2 \neq 1$ 이고 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 할 때 $f(-x)$ 는?

① $\frac{1}{f(x)}$

② $-f(x)$

③ $\frac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$

⑤ $f(x)$

해설

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ 에서}$$

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

19. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y = |x+a| + b + c$ 의 최솟값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$

$y = f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3}$ 를

x 에 대하여 풀면, $x = \frac{3y+4}{y+2}$

x 와 y 를 바꾸면, $y = f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$

$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a = 3, b = 4, c = 2$

함수 $y = |x+3| + 6$ 은 $x = -3$ 일 때, 최솟값 6을 갖는다.

20. 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -6
- ② -4
- ③ -2
- ④ 0
- ⑤ 2

해설

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면

$x = \sqrt{-2y+3}$ 이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$,

$x = \sqrt{-2y+3}$ 의 그래프는

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y = \sqrt{-2x+3}$, $x = \sqrt{-2y+3}$ 의

그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y = \sqrt{-2x+3}$ 의 그래프와

직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3} = x$ 의 을

제곱하면, $-2x+3 = x^2$, $x^2+2x-3 = 0$

$(x-1)(x+3) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = -3$

그런데 $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 이므로 $x = 1$, $y = 1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로

$a = 1$, $b = 1$

$\therefore a+b = 2$

