1. 분수함수 $y = \dfrac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x = a,\ y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a + b = -1$

해설

$y = \dfrac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x = -\dfrac{b}{a}$, $y = \dfrac{c}{a}$ 이므로
주어진 분수함수의 점근선은 $x = 2,\ y = -3$ 이다.
$\therefore 2 + (-3) = -1$

2. 함수 $y=\dfrac{x+3}{x-3}$ 은 $y=\dfrac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m , n 만큼 평행이동한 것이다. $m+n$ 의 값을 구하여라

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$y=\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}$

$y=\dfrac{6}{x}$ 의 그래프를

x 축으로 3 , y 축으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=3,\ n=1$

$m+n=4$

3. $y = \dfrac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 1,\ y = -2$ 일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = \frac{3-ax}{1-x} = \frac{ax-3}{x-1} = \frac{a-3}{x-1} + a$$

이 분수함수의 점근선은 $x = 1,\ y = a$

$\therefore\ a = -2$

4. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \geq 0\}$ 이다.

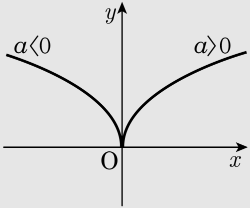
③ $y = -\sqrt{ax}$ 와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ $y = \sqrt{-ax}$ 와 y 축에 대하여 대칭이다.

⑤ $a > 0$ 이면 원점과 제 1사분면을 지난다.

해설

$a > 0$일 때와 $a < 0$일 때의 $y = \sqrt{ax}$의 그래프는 다음 그림과 같다.



그림에서 ②,③,④,⑤는 참임을 알 수있다.

그러나 $a > 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \geq 0\}$

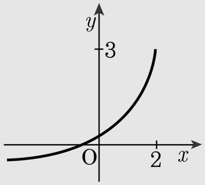
$a < 0$일 때의 정의역은 $\{x \mid x \leq 0\}$이므로 ①은 틀린 것이다.

5. 무리함수 $y = -\sqrt{-2(x-2)}+3$가 지나는 모든 사분면은?

① 1 , 2 사분면
② 1 , 4 사분면
③ 1 , 2 , 3 사분면
④ 2 , 3 , 4 사분면
⑤ 1 , 3 , 4 사분면

해설

꼭지점이 $(2,3)$ 이고 $(0,1)$ 을 지나므로
$\therefore$ 1, 2, 3 사분면을 지난다.



6. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$가

$f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때, $(f \circ g)(3) + (g \circ f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

$\therefore (f \circ g)(3) + (g \circ f)(3) = 6$

7. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$인 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = a$라 하면

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{4}$이고

$$f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)}) = \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1}$$ 이므로

$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$

$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4$,

$\sqrt{3(a-1)} = 3$

$3(a-1) = 9$, $a-1 = 3$, $a = 4$

$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

8. 함수 $y = \dfrac{ax+b}{2x+c}$가 점 $(1, 2)$를 지나고 점근선이 $x = 2, y = 1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① -8　　② -6　　③ -4　　④ -2　　⑤ 0

해설

점근선이 $x = 2,\ y = 1$이므로

$$y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{k}{x-2} + 1$$

또 점 $(1, 2)$를 지나므로

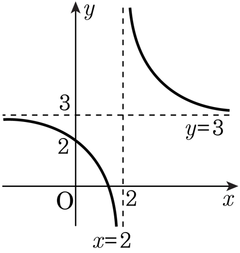
$$2 = \frac{k}{1-2} + 1 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore y = \frac{ax+b}{2x+c} = \frac{-1}{x-2} + 1 = \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-6}{2x-4}$$

$\therefore a = 2, b = -6, c = -4$

$\therefore a+b+c = -8$

9. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2,\ y=3$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?



① -6 ② -4 ③ -3

④ 2 ⑤ 7

해설

점근선이 $x=2, y=3$ 이므로 $a=3, c=-2$

점$(0,2)$를 지나므로 $\dfrac{b}{c}=2$

$\therefore\ b=-4$

$\therefore a+b+c=-3$

10. 다음과 같은 두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B = \varnothing$일때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

$$A = \left\{(x,\ y) \mid y = \frac{|x-1|}{x}\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \mid y = ax\right\}$$

① $a < 0$ ② $a > 0$ ③ $0 < a < 1$

④ $0 \leq a \leq 1$ ⑤ $a < 0, a > 1$

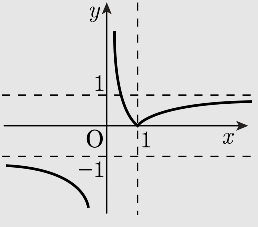
해설

$y = \dfrac{|x-1|}{x}$에서

$x \geq 1$일 때,

$y = \dfrac{x-1}{x} = -\dfrac{1}{x} + 1$

$x < 1$일 때, $y = \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$



$A \cap B = \varnothing$이려면 위의 곡선과 원점을 지나는 직선 $y = ax$가 만나지 않아야 하므로 ,
윗쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만 존재해야 한다.
따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a < 0$

11. 다음 보기에서 무리함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=-1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

㉡ $a>0$이면 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

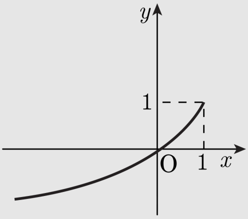
㉢ $a<0$이면 치역은 $\{y|y\le 1\}$이다.

㉣ $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만날 수 있다.

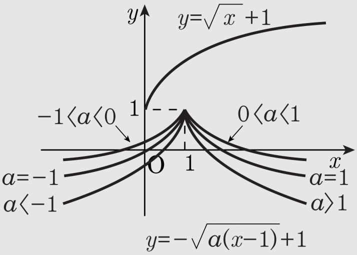
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

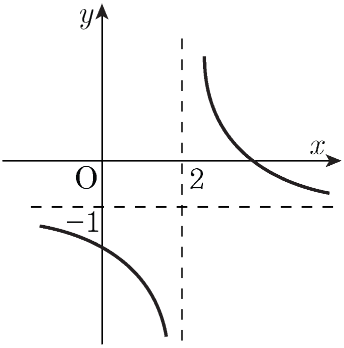
㉠ $a=-1$이면 주어진 무리함수는
$y=-\sqrt{-(x-1)}+1$
$y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a>0$ 또는 $a<0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)}\ge 0$이므로 치역은 $\{y|y\le 1\}$
㉣ $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y=\sqrt{x}+1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



12. 분수함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 무리함수 $y=\sqrt{cx+a}+b$의 그래프가 지나는 사분면을 모두 구하면?



① 제1사분면 ② 제2사분면 ③ 제3사분면
④ 제4사분면 ⑤ 제1, 2사분면

해설

$y=\dfrac{b}{x+a}+c$의 점근선은 $x=-a,\ y=c$

그림에서 $-a>0,\ c<0$이고, $b>0$

$\therefore\ a<0,\ b>0,\ c<0\cdots$㉠

한편 $y=\sqrt{cx+a}+b=\sqrt{c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)}+b$이므로

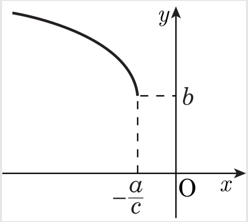
$c\left(x+\dfrac{a}{c}\right)\geq 0$

이때 $c<0$이므로 $x\leq -\dfrac{a}{c}$

㉠에서 $-\dfrac{a}{c}<0$이므로 $x<0$

또 $y=\sqrt{cx+a}+b\geq b$

따라서 그래프는 다음 그림과 같이



제2사분면만을 지난다.

13. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a+p+q$ 의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

정의역은 $\{x \mid a(x-p) \geq 0\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0,\ p = 3$

치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$이므로 $q = 4$

$\therefore\ f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$

이때, $f(1) = 6$이므로

$\sqrt{-2a} + 4 = 6,\ \sqrt{-2a} = 2$, $-2a = 4$

$\therefore\ a = -2$

$\therefore\ a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$

14. $y = \sqrt{x-1} + 2$의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 2)$ ② $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 1)$ ④ $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2 (x \geq 3)$

해설

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 에서 $\sqrt{x-1} \geq 0$이므로 $y \geq 2$

또 양변을 제곱하면, $(y-2)^2 = x - 1$

$\therefore\ x = y^2 - 4y + 5\ (y \geq 2)$

x와 y를 바꾸면 $y = x^2 - 4x + 5\ (x \geq 2)$

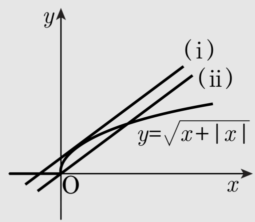
15. 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-1<k<0$ ② $-1<k\le 0$ ③ $0<k<\frac{1}{2}$

④ $0\le k<\frac{1}{2}$ ⑤ $0<k\le\frac{1}{2}$

해설

$x\ge 0$일 때 $y=\sqrt{2x}$이고 $x<0$일 때 $y=0$이므로 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프는 그림과 같고 직선 $y=x+k$와 서로 다른 세 점에서 만나려면 (i)과 (ii)사이에 존재해야 한다.



① 곡선 $y=\sqrt{2x}$와 직선 $y=x+k$가 접할 때

$\sqrt{2x}=x+k$에서 $2x=(x+k)^2$

$x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0,\ \ -2k+1=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

② 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때 $k=0$

①, ②에서 구하는 k의 값의 범위는 $0<k<\frac{1}{2}$

16. $A=\{(x, y) \mid 0 \le y < \sqrt{1-x^2}\}$, $B=\{(x, y) \mid 2x+y>k\}$에서 $A \cap B = A$가 되게 하는 k 의 범위를 구하면?

① $k \le -2$ ② $k < -2$ ③ $k > -2$

④ $k \ge -2$ ⑤ $k \ne -2$

해설

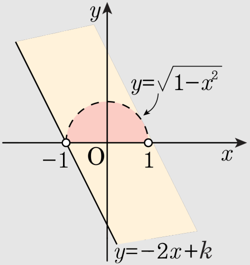
$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ 이므로

그림을 그려 부등식의 영역으로 표시하면

집합 B 에서 $y > -2x + k$ 이므로

점 $(-1,\ 0)$ 를 지날 때, $k = -2$ 이다.

따라서, $A \subset B$ 이려면 $k \le -2$

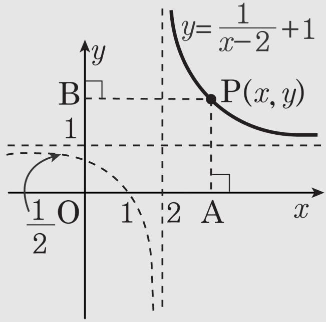


17. 분수함수 $y=\dfrac{1}{x-2}+1(x>2)$ 의 그래프 위의 한 점 P(x, y) 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 하자. 이 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설



위 그림에서 $\overline{\mathrm{PA}}=y=\dfrac{1}{x-2}+1$ $\overline{\mathrm{PB}}=x(x>2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=x+\dfrac{1}{x-2}+1=x-2+\dfrac{1}{x-2}+3$

$\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\dfrac{1}{x-2}}+3=5$

(단, 등호는 $x-2=\dfrac{1}{x-2}$ 일 때 성립)

18. $x^2 \neq 1$이고 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$이라 할 때 $f(-x)$는?

① $\dfrac{1}{f(x)}$　② $-f(x)$　③ $\dfrac{1}{f(-x)}$

④ $-f(-x)$　⑤ $f(x)$

해설

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$에서

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{1}{f(x)}$$

19. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y=|x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x)=(f^{-1})^{-1}(x)$

$y=f^{-1}(x)=\dfrac{2x-4}{-x+3}$ 를

x 에 대하여 풀면, $x=\dfrac{3y+4}{y+2}$

x 와 y 를 바꾸면, $y=f(x)=\dfrac{3x+4}{x+2}$

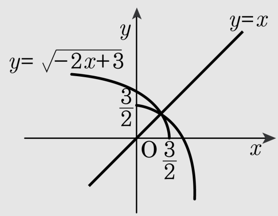
$f(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a=3,\ b=4,\ c=2$

함수 $y=|x+3|+6$ 은 $x=-3$ 일 때, 최솟값 6 을 갖는다.

20. 두 함수 $y=\sqrt{-2x+3}$, $x=\sqrt{-2y+3}$ 의 그래프의 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설



함수 $y=\sqrt{-2x+3}$ 에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\sqrt{-2y+3}$이므로 두 함수는 서로 역함수의

관계에 있다.

따라서, 두 함수 $y=\sqrt{-2x+3}$,

$x=\sqrt{-2y+3}$의 그래프는

직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 함수 $y=\sqrt{-2x+3}$, $x=\sqrt{-2y+3}$의

그래프는 아래 그림과 같으므로

두 함수의 그래프의 교점은

함수 $y=\sqrt{-2x+3}$의 그래프와

직선 $y=x$의 교점과 같다.

두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{-2x+3}=x$의 을

제곱하면, $-2x+3=x^2$, $x^2+2x-3=0$

$(x-1)(x+3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $0\le x\le\dfrac{3}{2}$이므로 $x=1,\ y=1$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로

$a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b=2$