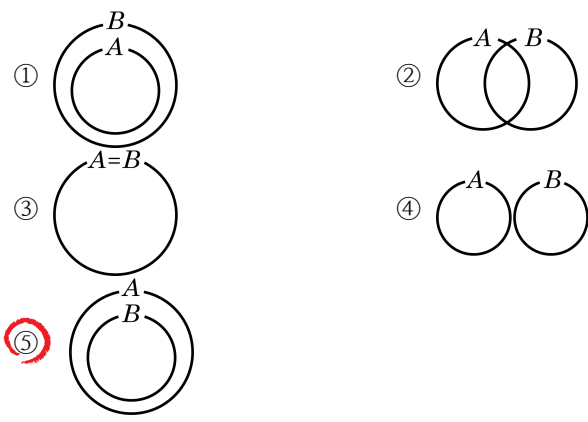


1. $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \{1, 2, 3, 6\}$ 을 원소로 가지는 집합을 각각 A, B 라 할 때, 두 집합 사이의 관계를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?



해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로
 $B \subset A$, $A \neq B$

2. 다음 중 옳은 것은?

① $0 \subset \{\emptyset\}$

② $\{x, y\} \not\subset \{y, x\}$

③ $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$

④ $\{\emptyset\} \subset \{2, 4, 6\}$

⑤ $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 4, 7\}$

해설

① $0 \not\subset \{\emptyset\}$

② $\{x, y\} = \{y, x\}$

④ $\{\emptyset\} \not\subset \{2, 4, 6\}$

⑤ $\{1, 3, 5\} \not\subset \{1, 3, 4, 7\}$

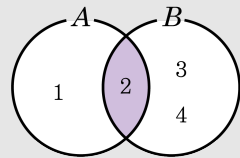
3. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2\}, A \cap B = \{2\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 집합 B 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2, 3, 4\}$

해설

집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



4. 전체 집합 $U = \{x|x \text{는 } 20\text{보다 작은 짝수}\}$ 의 부분집합 $A = \{x|x \text{는 } 16\text{의 약수 중 짝수인 자연수}\}$ 에 대하여 A^c 의 원소는?

① 2 ② 4 ③ 5 ④ 8 ⑤ 11

해설

$$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$A = \{2, 4, 8, 16\}$$

$$A^c = U - A = \{6, 10, 12, 14, 18\}$$

5. 세 수 $A = 3\sqrt{3} - 1$, $B = \sqrt{3} + 2$, $C = 2\sqrt{3} + 1$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $C < B < A$

② $A < B < C$

③ $A < C < B$

④ $B < A < C$

⑤ $B < C < A$

해설

i) $A - B = (3\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 2)$
 $= 2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$
 $\therefore A > B$

ii) $B - C = (\sqrt{3} + 2) - (2\sqrt{3} + 1)$
 $= 1 - \sqrt{3} < 0$
 $\therefore B < C$

iii) $C - A = (2\sqrt{3} + 1) - (3\sqrt{3} - 1)$
 $= 2 - \sqrt{3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} > 0$
 $\therefore C > A$

따라서 $B < A < C$

6. 다음 중 항등함수를 찾으려면?

- ① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$
④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

7. 다음 식을 계산하면?

$$\frac{x^3-1}{x^4+x^2+1} \times \frac{x^3+1}{x^4-1}$$

- ① x

② x^2

③ $\frac{1}{x}$

④ $\frac{1}{x^2}$

⑤ $\frac{1}{x^2+1}$

해설

$$\begin{aligned} &\frac{x^3-1}{x^4+x^2+1} \times \frac{x^3+1}{x^4-1} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} \\ &\quad \times \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

8. 분수식 $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$ 을 간단히 하면?

① $-\frac{1}{x+1}$

② $\frac{x+1}{x}$

③ $\frac{x}{x-1}$

④ $\frac{x-1}{x}$

⑤ $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

9. 유리수 x, y 가 $(x-2\sqrt{2})(4-\sqrt{2}y)=8$ 을 만족할 때, x^2+y^2 의 값은?

- ① 20 ② 16 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

$(x-2\sqrt{2})(4-\sqrt{2}y)=8$ 을 전개하여 정리하면

$$(4x+4y-8)-(xy+8)\sqrt{2}=0$$

$$\therefore 4x+4y-8=0 \Rightarrow x+y=2$$

$$\therefore xy+8=0 \Rightarrow xy=-8$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\times(-8)=20$$

10. 다음 무리함수 중 함수 $y = \sqrt{-x}$ 을 평행이동하여 얻을 수 없는 것을 고르면?

① $y = \sqrt{-x+2}$

② $y = \sqrt{-(x+1)} + 3$

③ $y = \sqrt{3-x}$

④ $y = \sqrt{x-1} - 1$

⑤ $y = \sqrt{-x} - 1$

해설

$y = \sqrt{-x}$ 에서 x 앞의 부호가 반대일 경우
평행이동하여 얻을 수 없다.

11. 다음 중 원소의 개수가 0 이 아닌 유한집합은?

- ① $\{x \mid x \text{는 일의 자리의 숫자가 1인 짝수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 2로 나누었을 때 나머지가 1 인 자연수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 8보다 큰 8의 약수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 두 자리의 2의 배수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 1 < x < 2 \text{인 분수}\}$

해설

- ① $\emptyset$
- ② $\{1, 3, 5, \dots\}$
- ③ $\emptyset$
- ④ $\{10, 12, 14, 16, \dots, 98\}$
- ⑤ $\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\right\}$

12. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 5$, $n(B) = 7$ 이고 $n(A \cap B) = 3$ 일 때, $n(A \cup B)$ 는?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 5 + 7 - 3 = 9 \end{aligned}$$

13. $A = \{2, 4, 6, 9, 10\}, B = \{2, 7, 9, 10\}$ 에 대하여 $X - A = \emptyset, (A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 있는 것은?

① $\{2, 4\}$

② $\{2, 6\}$

③ $\{4, 6\}$

④ $\{4, 6, 7\}$

⑤ $\{4, 6, 9, 11\}$

해설

$(A - B) \subset X \subset A$ 이므로 $\{4, 6\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 9, 10\}$ 이다. 따라서 X 가 될 수 있는 집합은 $\{4, 6\}$ 이다.

14. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이고, $a + b + c = 14$ 일 때, $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \{ (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \}$$

$$\geq (\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2$$

$$(\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c})^2 \leq 14(a + b + c) = 14^2$$

이 때 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 3\sqrt{c} \leq 14$$

따라서 최댓값은 14이다.

15. 두 집합 $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $f : x \rightarrow x$	㉡ $g : x \rightarrow x + 2$
㉢ $h : x \rightarrow x $	㉣ $k : x \rightarrow x^2 - 1$

- ① ㉡, ㉣
- ② ㉠, ㉡, ㉣
- ③ ㉡, ㉢, ㉣
- ④ ㉠, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $f(x) = x$ 에서 $f(-1) = -1$ 이고 $-1 \notin Y$ 이므로, 함수가 아니다.
㉡ $g(x) = x+2$ 에서 $g(-1) = 1 \in Y$, $g(1) = 3 \in Y$, $g(2) = 4 \in Y$ 이므로 함수이다.
㉢ $h(x) = |x|$ 에서 $h(-1) = 1 \in Y$, $h(1) = 1 \in Y$, $h(2) = 2 \in Y$ 이므로 함수이다.
㉣ $k(x) = x^2-1$ 에서 $k(-1) = 0 \notin Y$, $k(1) = 0 \notin Y$, $k(2) = 3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

16. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 중에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ 를 만족시키는 것의 개수는?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

역함수 f^{-1} 가 존재하므로, f 는 일대일대응이다.

(i) $f(1) = 1$ 일 때,

$f(2) = 2, f(3) = 3$ 또는 $f(2) = 3, f(3) = 2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때,

$f(2) = f^{-1}(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때,

$f(3) = f^{-1}(3) = 1$ 이므로 $f(2) = 2$

(i), (ii), (iii)에서 함수 f 의 개수는 4개이다.

17. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$

이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$$

그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$$

$$\therefore \frac{1}{a} = a \text{ 이고 } \frac{1}{a} = -1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\therefore a = -1$$

18. 함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$, $f(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

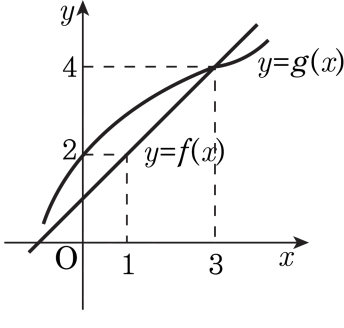
해설

$$f(2) = 2a + b = 1, \quad f(1) = a + b = 2$$

$$\text{연립하면 } a = -1, \quad b = 3$$

$$\therefore f(3) = 3a + b = 0$$

19. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면
 $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) = g^{-1}(f(1)) + 4$
 $= g^{-1}(2) + 4$
 $g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$
문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가
 $(0, 2)$ 를 지나므로 $g(0) = 2$
이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$
 $\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$

20. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서 양변을 x 로 나눈다.

$$x + \frac{1}{x} - 5 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 25 - 2 = 23$$

21. $\frac{x}{4} = \frac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\frac{xy}{x^2 + 2y^2}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{2}{17}$ ② $\frac{3}{17}$ ③ $\frac{4}{17}$ ④ $\frac{5}{17}$ ⑤ $\frac{6}{17}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} = \frac{y}{3} &\Rightarrow x = \frac{4}{3}y \\ \therefore \frac{xy}{x^2 + 2y^2} &= \frac{16}{9} \frac{\frac{4}{3}y^2}{y^2 + 2y^2} = \frac{6}{17}\end{aligned}$$

22. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $A = -25$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{-x+2(y+4z)-8 \times z}{-5+2 \times 2-8 \times 3} \\ &= \frac{-x+2y+8z-8z}{-5+4-24} = \frac{-x+2y}{-25} \\ & \therefore A = -25 \end{aligned}$$

23. 분수함수 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선이 $x = a$, $y = b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = \frac{2x-1}{x-1} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{x-1}$ 이므로,
점근선은 $y = 2$, $x = 1$ 이다.
 $\therefore a + b = 3$

24. 유리함수 $y = \frac{ax-b}{x-2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $y = \frac{3x-1}{x+c}$ 의 그래프와 일치한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax-b}{x-2} \Rightarrow y-2 = \frac{a(x+3)-6}{(x+3)-2} \\ \Rightarrow y &= \frac{ax+3a-b+2(x+1)}{(a+2)x+3a-b+2} \\ &= \frac{(a+2)x+3a-b+2}{x+1} \\ \therefore c &= 1, a = 1, b = 6 \\ \Rightarrow a+b+c &= 8 \end{aligned}$$

25. $y = \frac{3-ax}{1-x}$ 의 그래프의 점근선이 $x = 1$, $y = -2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$y = \frac{3-ax}{1-x} = \frac{ax-3}{x-1} = \frac{a-3}{x-1} + a$$

이 분수함수의 점근선은 $x = 1$, $y = a$

$$\therefore a = -2$$

26. 분수함수 $y = \frac{ax+b}{x-1}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 모두 점 (2, 3) 을 지날 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$f(x) = \frac{ax+b}{x-1} \text{ 라 하면 } f(2) = 3, f^{-1}(2) = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$f^{-1}(2) = 3 \text{ 에서 } f(3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = \frac{3a+b}{2} = 2 \therefore 3a + b = 4 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1 \therefore ab = 1$$

27. $y = \sqrt{4x-12} + 5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 α , y 축으로 β 만큼 평행이동한 것이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3} + 5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 3만큼,
 y 축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha = 3, \beta = 5$
 $\therefore \alpha + \beta = 8$

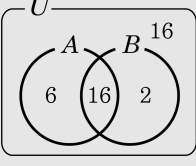
28. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 40$,
 $n(A) = 22$, $n(B) = 18$, $n(A - B) = 6$ 일 때, $n((A \cup B)^c)$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$$n((A \cup B)^c) = 16$$

29. 100 명의 학생 중 축구를 좋아하는 학생이 77 명, 농구를 좋아하는 학생이 57 명이다. 축구와 농구를 모두 좋아하는 학생수의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때 $a + b$ 의 값은?

① 90 ② 91 ③ 93 ④ 96 ⑤ 97

해설

최대일 때는 한 쪽이 다른 쪽에 포함될 때이다.

$$\therefore a = 57$$

모두 좋아하는 학생수를 x 라 하면 $77 + 57 - x \leq 100, x \geq 34$

$$\therefore b = 34$$

$$\therefore a + b = 91$$

30. 명제 ' $|x-1| \leq a$ 이면 $|x| < 3$ 이다.'가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위는?
(단, x, y 는 실수이고, $a > 0$)

① $0 < a \leq 2$

② $0 < a < 2$

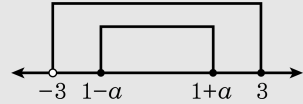
③ $0 < a \leq 4$

④ $0 < a < 4$

⑤ $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \leq a$ 에서 $-a \leq x-1 \leq a \therefore 1-a \leq x \leq 1+a$ $|x| < 3$ 에서 $-3 < x < 3$ 따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서 $1-a > -3$ 그리고 $1+a < 3 \therefore a < 4$ 그리고 $a < 2 \therefore a < 2$ 그런데 $0 < a$ 이므로, $0 < a < 2$

31. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 ‘반드시 참이다’라고 말할 수 없는 명제는?

- ① $q \rightarrow r$
- ② $p \rightarrow r$
- ③ $\sim p \rightarrow \sim r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
 $\sim r \rightarrow \sim q \leftrightarrow q \rightarrow r$
 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$
이므로
 $p \rightarrow r \leftrightarrow r \rightarrow p$

32. x, y, z 가 실수일 때, 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것은?
- ① $p : x$ 는 2 의 배수, $q : x$ 는 6 의 배수
 - ② $p : x$ 는 16 의 약수, $q : x$ 는 8 의 약수
 - ③ $p : x > 0$ 또는 $y > 0$, $q : x + y > 0$
 - ④ $p : (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$, $q : x = y = z$
 - ⑤ $p : x, y$ 는 정수, $q : x + y, xy$ 는 정수

해설

- ① 2 의 배수 중 4 는 6 의 배수가 아니므로 $p \not\Rightarrow q$
6 의 배수는 모두 2 의 배수이므로 $p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ② 16 의 약수 중 16 은 8 의 약수가 아니므로 $p \not\Rightarrow q$
8 의 약수는 모두 16 의 약수이므로 $p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ③ $x = 1, y = -3$ 이면 $x + y = -2 < 0$ 이므로 $p \not\Rightarrow q$
 $x + y > 0$ 이면 $x > 0$ 또는 $y > 0$ 이므로 $p \Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ④ $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x - y = y - z = z - x = 0 \Leftrightarrow x = y = z$
따라서, p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ⑤ x, y 가 정수이면 $x + y, xy$ 도 정수이므로 $p \Rightarrow q$
 $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 $x + y, xy$ 는 정수이지만 x, y 는 정수가 아니므로 $p \not\Leftarrow q$
따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

33. a, b 가 실수일 때, p 가 q 이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① $p : a^2 + b^2 = 0, q : |a| + |b| = 0$

② $p : a = 0, q : |a + b| = |a - b|$

③ $p : |a| = |b|, q : a^2 = b^2$

④ $p : a + b > 0, ab > 0, q : a > 0, b > 0$

⑤ $p : |a| + |b| > |a + b|, q : ab < 0$

해설

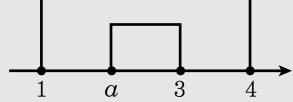
$q : |a + b| = |a - b| \rightarrow a = 0 \text{ 또는 } b = 0$

34. $a \leq x \leq 3$ 은 $1 \leq x \leq 4$ 이기 위한 충분조건이고, $1 \leq x \leq 4$ 이기 위한 필요조건은 $0 \leq x \leq b$ 이다. 이때, a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은?

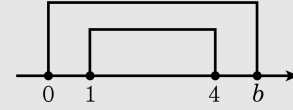
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

- (i) $0 \leq x \leq 3$ 은 $1 \leq x \leq 4$ 이기 위한 충분조건이므로 다음 그림에서 $1 \leq a \leq 3$ 따라서, a 의 최솟값은 1이다.



- (ii) $1 \leq x \leq 4$ 이기 위한 필요조건이 $0 \leq x \leq b$ 이므로 다음 그림에서 $b \geq 4$



따라서, b 의 최솟값은 4이다.

- (i), (ii) 에서 a 의 최솟값과 b 의 최솟값의 곱은 $1 \times 4 = 4$

35. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 P, Q 가 조건 p, q 를 만족하는 집합이라고 하자. 조건 p 가 ‘ x 는 소수’이고 p 가 q 이기 위한 필요조건일 때, 집합 Q 의 원소가 될 수 없는 것은?

- ① 2
- ② 3
- ③ 5
- ④ 7
- ⑤ 9

해설

$U = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$, $P \subset U$, $Q \subset U$ 이고 조건 p 가 ‘ x 는 소수’ 이므로 $P = \{2, 3, 5, 7\}$
 p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$
따라서, 집합 P 의 원소가 아닌 것은 집합 Q 의 원소가 될 수 없다.

36. 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족할 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 2f(0)$
 $\therefore f(0) = 0$

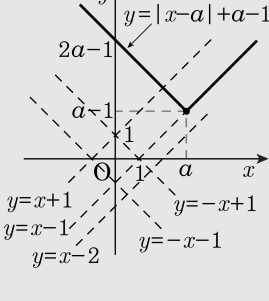
37. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x + 1$
 ② $y = x - 1$
 ③ $y = x - 2$
- ④ $y = -x - 1$
 ⑤ $y = -x + 1$

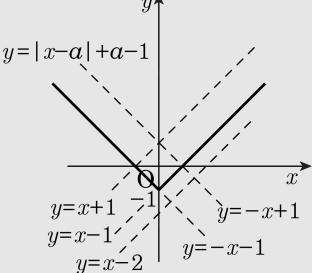
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

i) $a > 0$ 일 때,
 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음
 그림과 같다.
 따라서, $y = |x - a| + a - 1$ 은 $y =$
 $x + 1$,
 $y = x - 1$ 과 만나며 $a \leq 1$ 일 때
 $y = -x + 1$ 도 만난다.

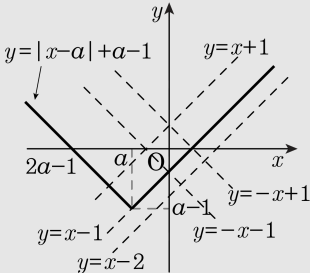


ii) $a = 0$ 일 때,
 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
 따라서 $y = |x - a| + a - 1$ 과
 만나지 않는 그래프는 $y = x - 2$ 밖에 없다.



iii) $a < 0$ 일 때,
 $y = |x - a| + a - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
 따라서 $y = |x - a| + a - 1$ 과 만나지 않는

그래프는 $y = x - 2$ 밖에 없다.



i), ii), iii) 에서 $y = |x - a| + a - 1$ 의
 그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y = x - 2$ 이다.

38. 부분분수를 이용하여 다음을 만족시키는 양수 x 를 구하여라.

$$\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} = \frac{4}{9}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 식을 부분분수로 나타내면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+8} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x(x+8)} = \frac{4}{x(x+8)} \\ & = \frac{4}{9} \\ & \therefore x(x+8) = 9 \\ & x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x+9) = 0 \\ & x > 0 \text{ 이므로 } x = 1 \end{aligned}$$

39. $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프는 점 (2, 0)을 지나고, $x = 1$, $y = 2$ 를 점근선으로 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ -2 ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

$x = 1$, $y = 2$ 가 점근선이므로

$y = \frac{k}{x-1} + 2$ 이다.

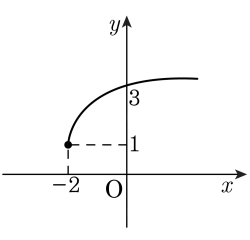
점(2, 0)을 지나므로 $k = -2$

$$\therefore y = \frac{-2}{x-1} + 2 = \frac{-2 + 2(x-1)}{x-1} = \frac{2x-4}{x-1}$$

$$\therefore a = 2, b = -4, c = -1$$

$$\therefore a + b + c = -3$$

40. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 1 만큼 평행이동한 것과 같으므로 $y = \sqrt{a(x+2)} + 1$ 또, 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
 $3 = \sqrt{2a} + 1, \sqrt{2a} = 2$
 $\therefore a = 2$
따라서 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1 = \sqrt{2x+4} + 1$ 이고,
이것이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 일치하므로
 $a = 2, b = 4, c = 1$
 $\therefore a + b + c = 7$

41. 다음 조건을 만족하는 집합 A 의 원소를 모두 구하여 원소나열법으로 나타내어라.

- ㉠ 모든 원소는 20 이하의 자연수이다.
- ㉡ $2 \in A, 3 \in A$
- ㉢ $a \times b \in A, a \in A, b \in A$

▶ 답 :

▷ 정답 : {2, 3, 4, 6, 8, 9, 12,16, 18}

해설

$2 \in A, 3 \in A$ 이고, 모든 원소는 20 이하의 자연수이므로
 $2 \times 2 = 4 \in A, \quad 2 \times 3 = 6 \in A$
 $3 \times 3 = 9 \in A, \quad 3 \times 4 = 12 \in A, \quad 3 \times 6 = 18 \in A$
 $4 \times 2 = 8 \in A, \quad 4 \times 4 = 16 \in A$

42. 다음은 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 원소의 개수와 진부분집합의 개수를 바르게 구한 것은?
- ① 5, 31 ② 6, 63 ③ 7, 127
- ④ 8, 255 ⑤ 9, 511

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$ 를 원소나열법으로 고치면 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 이므로 원소의 개수는 8개이다.
(진부분집합의 개수) = (부분집합의 개수) - 1
이므로 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$ 이고
진부분집합의 개수는 $256 - 1 = 255$ (개)이다.

43. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

$B \subset A, \{1, 3\} \subset B, n(B) = 5$

▶ 답 : 4 개

▷ 정답 : 4 개

해설

{1, 2, 3, 4, 6}, {1, 2, 3, 4, 12},
{1, 2, 3, 6, 12}, {1, 3, 4, 6, 12}

44. 집합 $A = \{x \mid 15 < x < 30, x = 3n + 2(n \text{은 자연수})\}$ 라고 할 때, 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 8 개 ② 16 개 ③ 24 개 ④ 32 개 ⑤ 40 개

해설

$A = \{17, 20, 23, 26, 29\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 짝수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 17, 23, 29로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$$\therefore 32 - 8 = 24 \text{ (개)}$$

45. 우리 반 학생 50 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 35 명, 과학을 좋아하는 학생은 25 명일 때, 두 과목 모두 좋아하는 학생 수의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 35 명

해설

문제에서 $A \cup B$ 이 주어지고 있다. 우리 반 학생 50 명이 $A \cup B$ 이다.

수학을 좋아하는 학생을 집합 A 라고 하고, 과학을 좋아하는 학생을 집합 B 라고 한다.

수학, 과학을 모두 좋아하는 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

$A \cap B$ 의 최솟값과 최댓값을 구해 보자.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$50 = 35 + 25 - x$$

x 의 최솟값은 10명이다.

최댓값은 과학을 좋아하는 학생이 수학을 좋아하는 학생에 포함
될 때 성립한다.

그러므로 r 의 최대값은 25명이다.

그러므로 x 의 최댓값은 25명이다.
최소값과 최댓값의 차는 25명이다.

46. 전체집합 $U = \{3 \times x + 1 | x < 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 부분집합 A, B 가 있다.
 $A^c \cap B^c = \{28\}$, $(A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 10, 19, 25\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$U = \{3 \times x + 1 | x < 10, x \text{는 자연수}\} = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$,
 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{28\}$,
 $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{4, 10, 19, 25\}$,
전체집합 U 는 $A - B$, $B - A$, $(A \cup B)^c$, $A \cap B$ 로 이루어지므로,
 $A \cap B = \{7, 13, 16, 22\}$ 이다.
 $\therefore n(A \cap B) = 4$

47. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle OBC$ 의 넓이를 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}ab,$ A(3, 2)

는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 위의 점이므로

$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3}{a} \times \frac{2}{b}} = 2\sqrt{\frac{3}{S}}$

양변을 제곱하면 $1 \geq \frac{12}{S} \quad \therefore S \geq 12$

따라서 $\triangle OBC$ 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

48. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 에 대하여 $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$

일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{99}$ ② $\frac{99}{100}$ ③ $\frac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f_1(x)) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x$$

$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.

즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

$$\text{따라서 } f_{100}(x) = f_{3 \times 33 + 1}(x) = f_1(x) = \frac{x-1}{x}$$

$$\therefore f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

49. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ($x \geq 2$), $g(x) = 2x - 6$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1})(4)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} g(5) &= 4 \text{ 이므로 } g^{-1}(4) = 5 \\ (f \circ (g \circ f)^{-1})(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(4) \\ &= g^{-1}(4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

50. 함수 $f(x) = |x| + |x-a| + |x-3a|$ 의 최솟값이 6 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?
(단, $a > 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

i) $x < 0$ 일 때, $f(x) = -3x + 4a$
 ii) $0 \leq x < a$ 일 때, $f(x) = -x + 4a$
 iii) $a \leq x < 3a$ 일 때, $f(x) = x + 2a$
 iv) $x \geq 3a$ 일 때, $f(x) = 3x - 4a$
 따라서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같고 최솟값은 $3a$ 이므로
 $3a = 6 \quad \therefore a = 2$

