1. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a},\ -a^2 \neq -1$$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

2. 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=3$

▷ 정답 : $y=-1$

▷ 정답 : $z=2$

해설

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3}$ 에서

$3x+2y=7 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+3}{5}$ 에서

$5x-2z=11 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$x+2y+3z=7 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠ − ㉢을 하면 $2x-3z=0 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉡ $\times 3 -$ ㉣ $\times 2$를 하면 $11x=33$

$\therefore \ x=3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y=-1, \ z=2$

3. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x+2y=8 \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=9 \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=5 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=2$

▷ 정답 : $y=3$

▷ 정답 : $z=1$

해설

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $x+2y+3z=11 \quad \cdots\cdots ㉣$
㉣ − ㉠에서 $3z=3 \quad \therefore z=1$
㉣ − ㉡에서 $x=2$
㉣ − ㉢ 에서 $y=3$

4. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$,

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2$,

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ii) $x=2y$일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를

$x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

7. 연립방정식 $\begin{cases} xy+2yz=8 \\ yz+2zx=15 \\ zx+2xy=10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$xy+2yz=8 \quad \cdots ㉠$

$yz+2zx=15 \cdots ㉡$

$zx+2xy=10 \cdots ㉢$

㉠ + ㉡ + ㉢하면 $3(xy+yz+zx)=33$

$xy+yz+zx=11 \quad \cdots ㉣$

㉠ − ㉣하면 $yz-zx=-3 \quad \cdots ㉤$

㉢ − ㉤하면 $3zx=18$

$zx=6 \cdots ㉥$

$xy=2 \cdots ㉦$

$yz=3 \cdots ㉧$

㉥ × ㉦ × ㉧하면 $(xyz)^2=36$

$xyz=\pm 6$

$\therefore\ x=\pm 2, y=\pm 1, z=\pm 3$ (복호동순이 아님)

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=4+1+9=14$

8. $\triangle$ABC에서 $\angle A + 2\angle B = 235°$, $\angle B + 2\angle C = 190°$ 일 때, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$를 각각 순서대로 구하여라.

▶ 답: $\underline{\quad\quad}°$

▶ 답: $\underline{\quad\quad}°$

▶ 답: $\underline{\quad\quad}°$

▷ 정답: $\angle A = 35°$

▷ 정답: $\angle B = 100°$

▷ 정답: $\angle C = 45°$

해설

$\angle A = x$, $\angle B = y$, $\angle C = z$라 하면

$$\begin{cases} x + 2y = 235 & \cdots\cdots ㉠ \\ y + 2z = 190 & \cdots\cdots ㉡ \\ x + y + z = 180 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉢ $\times 2 -$ ㉡을 하면 $2x + y = 170 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉣ $\times 2 -$ ㉠을 하면 $3x = 105$

$\therefore \ x = 35$

$x = 35$를 ㉣에 대입하면 $y = 100$

또, $x = 35$, $y = 100$ 을 ㉢에 대입하면 $z = 45$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 4x-2y+z=4 \\ 3x-5y-2z=5 \end{cases}$ 을 풀 때,

xyz의 값을 구하면?

① -6 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$\begin{cases} x+y+z=1\cdots① \\ 4x-2y+z=4\cdots② \\ 3x-5y-2z=5\cdots③ \end{cases}$$

① − ② : $-3x+3y=-3$ $\therefore -x+y=-1$

$2\times$② + ③ : $11x-9y=13$

위의 두 식을 연립하여 풀어주면, $x=2,\ y=1$

$\therefore\ z=1-x-y=1-2-1=-2$

$\therefore\ xyz=2\times1\times(-2)=-4$

10. x, y에 관한 연립방정식 $\begin{cases} kx+y=-3 \\ 2x+(k-1)y=6 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때의 k의 값을 α, 해가 없을 때의 k의 값을 β라 하면, $\alpha+\beta$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

해가 무수히 많을 조건은 $\dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{k-1}=\dfrac{-3}{6}$

해가 없을 조건은 $\dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{k-1}\neq\dfrac{-3}{6}$

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{1}{k-1}$에서 $k(k-1)=2$,

$k^2-k-2=0$

$\therefore\ k=-1,\ 2$

(i) $k=-1$일 때,

$\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{-1-1}=\dfrac{-3}{6}$이므로 해가 무수히 많다.

(ii) $k=2$일 때,

$\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{2-1}\neq\dfrac{-3}{6}$이므로 해가 없다.

$\therefore\ \alpha=-1, \beta=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

11. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값은?

① 4　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 \quad\quad \cdots ② \end{cases}$$

①식 인수분해 : $(2x - y)(x - y) = 0$

$\therefore\ y = 2x, y = x$

②식에 대입하면

$y = 2x \to 5x^2 - (2x)^2 = 4,$

$x^2 = 4,\ x = \pm 2, y = \pm 4$

$y = x \to 5x^2 - x^2 = 4,\ 4x^2 = 4$

$x^2 = 1,\ x = \pm 1, y = \pm 1$

$x = \alpha, y = \beta$에서

$\alpha + \beta \ :\ 2 + 4 = 6,\ -2 - 4 = -6$

$1 + 1 = 2\ ,\ -1 - 1 = -2$

$\therefore \alpha + \beta$의 최댓값은 6

12. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㉢ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㉣ \\ xy=12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 해의 합은 0

13. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍$(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 4개

④ 8개　　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$

(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy = 1,\ x = y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$

(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy = -1\ ,\ x = -y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

14. 0이 아닌 실수 x, y가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서

$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$

$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$

$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$

$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로

$xy-2a=0,\ y-2ax=0$

$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$

두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$

$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm1$

15. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z라 하자

$2x+3y+4z=80 \quad \cdots$ ㉠

$x+y+z=30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y=40-2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z=x-10$

$\therefore$ $x=10$ 이면 $z=0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x\geq 11$, 최소 11 문항

16. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20 % 적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B의 지불금액은 A의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

① 27000 원 ② 30000 원 ③ 81000 원

④ 162000 원 ⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B가 지불한 금액을 각각 x원, y원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.

$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$

$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$

따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots\cdots$ ㉠

$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots\cdots$ ㉡

또, ㉠, ㉡에서 $x = 30000$, $y = 27000$

따라서, A가 지불한 금액은

$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$

그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.

$\therefore$ (지불한 총 금액)$= 81000 \times 2 = 162000$(원)

17. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

$\begin{cases} u+v=5 & \cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$u^2-(5-u)=7$

$u^2+u-12=0$

$(u+4)(u-3)=0$

$\therefore\ u=-4$ 또는 $u=3$

(i) $u=-4,\ v=9$, 즉 $x+y=-4,\ xy=9$ 일 때, $x,\ y$ 는 $t^2+4t+9=0$ 의 두 근이므로 $t=-2\pm\sqrt{5}i$
따라서, $x=-2\pm\sqrt{5}i,\ y=-2\mp\sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
$(-2+\sqrt{5}i,\ -2-\sqrt{5}i),\ (-2-\sqrt{5}i,\ -2+\sqrt{5}i)$

(ii) $u=3,\ v=2$, 즉 $x+y=3,\ xy=2$ 일때, $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t-2)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=2$
따라서, $x=1,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=1$ 이므로
$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i), (ii) 에서 구하는 순서쌍의 개수는 4 개이다

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$ 라고 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로

$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$

즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$

$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1 \ge 0$

$2a^2-4a-1 \le 0$

$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \le a \le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=2$

19. 방정식 $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+5=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$ …… ㉠

이 때, x 가 실수이므로

$\frac{D}{4}=(1-y)^2-(2y^2-6y+5)\geq 0$

$y^2-4y+4\leq 0,\ (y-2)^2\leq 0$

여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2=0$

$\therefore\ y=2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$

$\therefore\ x=1\ \ \therefore\ \frac{y}{x}=\frac{2}{1}=2$

해설

주어진 식을 정리하면

$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$

$x^2+2(1-y)x+(1-y)^2+y^2-4y+4=0$

$\therefore\ (x+1-y)^2+(y-2)^2=0$ x, y 가 실수이므로 $x+1-y=0$, $y-2=0$

$\therefore\ x=1,\ y=2$

$\therefore\ \frac{y}{x}=2$

20. 서로 다른 세 정수 a, b, c에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c)=2$가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\dfrac{a+b+c}{3}$ ② $\dfrac{a+b+c-1}{3}$ ③ $\dfrac{a+b+c-2}{3}$
④ $\dfrac{a+b+c-3}{3}$ ⑤ $\dfrac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a<b<c$ 라 가정했을때, 정수근을 α라고 하면, $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)=2$를 만족하는 순서쌍은 $(1,-1,-2)$ 밖에 없다.

$\Rightarrow \alpha-a=1$

$\alpha-b=-1$

$\alpha-c=-2$

세 식을 다 더하면,

$3\alpha=a+b+c-2,\ \alpha=\dfrac{a+b+c-2}{3}$

21. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha+\beta=1-m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta=m+1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ (α, β는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

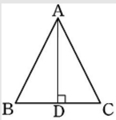
$\therefore \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-4 \end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

22. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 꼭지점 A 에서 변 BC 에 그은 수선의 발을 D 라 하자. 삼각형 ABC 의 둘레의 길이는 높이 AD 의 길이의 4 배이다. 이 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2
④ $\dfrac{1+\sqrt{17}}{3}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{9}}{3}$

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = a,\ \ \overline{\mathrm{BC}} = 2b,\ \ \overline{\mathrm{AD}} = h$ 라 놓으면

$2a + 2b = 4h \cdots\cdots$ (i)

$a^2 = b^2 + h^2 \cdots\cdots$ (ii)

(i) 에서 $h = \dfrac{a+b}{2}$ 를 (ii) 에 대입하여 정리하면

$3a^2 - 2ab - 5b^2 = 0 \ \cdots\cdots$ (iii)

(iii) 식의 양변을 b^2 으로 나누고

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BD}}} = \dfrac{a}{b} = x$ 라 놓으면

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$\therefore (x+1)(3x-5) = 0$

$\therefore x = \dfrac{5}{3} (\because x > 0)$

23. 두 개의 이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$과 $x^2+bx+\frac{1}{b}=0$이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$의 값은? (단, $a \neq b$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ a, b의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α라 하고 두 식에 대입하면

$$\alpha^2+a\alpha+\frac{1}{a}=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\alpha^2+b\alpha+\frac{1}{b}=0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

① − ②하면

$$\therefore \ \alpha(a-b)+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0,\ (a-b)\left(\alpha-\frac{1}{ab}\right)=0$$

$a \neq b$이므로 $\alpha=\frac{1}{ab}$

이것을 ①에 대입하면 $\left(\frac{1}{ab}\right)^2+a\cdot\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}=0$

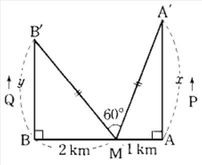
$$1+a^2b+ab^2=1+ab(a+b)=0$$

$$\therefore \ ab(a+b)=-1$$

24. 어느 정해진 지점 M에서 정동쪽으로 1 km 떨어진 지점을 A, 정서쪽으로 2 km 떨어진 지점을 B라 할 때, A, B 지점에서 각각 P, Q 라는 사람이 모두 정북쪽으로 달려서 15 분 후에 각각 A′, B′ 지점에 도달했다. $\overline{A'M}$ 의 거리와 $\overline{B'M}$ 의 거리가 같고, 두 선분이 이루는 각이 60° 일 때, P, Q 의 시속은 각각 얼마인가?

① $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ km/h, $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ km/h ② $\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$ km/h, $6\sqrt{3}$ km/h
③ $8\sqrt{3}$ km/h, $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ km/h ④ $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ km/h, $\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$ km/h
⑤ $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ km/h, $8\sqrt{3}$ km/h

해설



$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 의 거리를 각각 x, y 라 하고 피타고라스의 정리를 이용하면

$\sqrt{x^2+1^2} = \sqrt{y^2+2^2} \cdots$ ㉠

우선 A′, B′ 을 연결하면 $\triangle MA'B'$ 이 만들어지고, $\overline{MB'} = \overline{MA'}$ 이므로 $\angle MB'A' = \angle MA'B'$ 따라서 $\triangle MA'B'$ 은 정삼각형이다.

또, 점 B′ 에서 $\overline{A'A}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 A′B′H 가 만들어지므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\sqrt{(x-y)^2+3^2} = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+2^2} \cdots$ ㉡

㉠의 양변을 제곱하여 정리하면,

$x^2 - y^2 = 3 \cdots$ ㉠′

㉡에서 $\sqrt{(x-y)^2+9} = \sqrt{y^2+4}$,

$x^2 - 2xy = -5 \cdots$ ㉡′

㉠′ × 5 + ㉡′ × 3 을 하면

$8x^2 - 6xy - 5y^2 = 0,\ (2x+y)(4x-5y) = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{5}{4}y\ (\because\ x > 0,\ y > 0) \cdots$ ㉢

㉢을 ㉠′ 에 대입하면

$\dfrac{25}{16}y^2 - y^2 = 3,\ y^2 = \dfrac{16}{3}$

$\therefore\ y = \dfrac{4}{\sqrt{3}}(\because\ y > 0)$ 이 값을 ㉢에 대입하면 $x = \dfrac{5}{4} \times \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$

따라서 P, Q 는 15분 $\left(\dfrac{1}{4}\text{시간}\right)$ 동안 각각 x, y 만큼 움직였으므로

P 의 시속은 $\dfrac{5}{\sqrt{3}} \times 4 = \dfrac{20}{\sqrt{3}} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$(km/h)

Q 의 시속은 $\dfrac{4}{\sqrt{3}} \times 4 = \dfrac{16\sqrt{3}}{3} =$ (km/h)

25. x, y, z 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \cdots ㉠ \\ x - 3by + 2az = 0 \cdots ㉡ \\ x + 2by = 0 \cdots ㉢ \end{cases}$$

에서 x, y, z 가 동시에 0 이 아닌 해가 존재하도록 0 이 아닌 양의 정수 a, b 의 값을 정하면, 그 때의 $x : y : z$ 의 값은?

① $-1 : 1 : 5$ ② $-2 : 1 : 5$ ③ $-3 : 1 : 5$

④ $-4 : 1 : 5$ ⑤ $-5 : 1 : 5$

해설

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \cdots ㉠ \\ x - 3by + 2az = 0 \cdots ㉡ \\ x + 2by = 0 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ $\times 2a-$ ㉡ 하면

$(2a-1)x - (2a^2 - 3b)y = 0 \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 x 를 소거하면 $(2a^2 + 4ab - 5b)y = 0$

만일 $2a^2 + 4ab - 5b \neq 0$ 이면 $y = 0$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 0$

또, ㉠에서 $z = 0$ 이것은 $x = y = z = 0$ 이 되어 조건에 부적당하다.

따라서 $2a^2 + 4ab - 5b = 0$

b 에 대해 풀면 $b(4a-5) = -2a^2$, $b = \dfrac{-2a^2}{4a-5}$ 에서 우변이 정수가 되도록 정리하면

$$8b = \frac{-16a^2}{4a-5} = \frac{(4a-5)(-4a-5) - 25}{(4a-5)} = -4a - 5 - \frac{25}{4a-5}$$

위의 식에서 $|4a-5|$ 는 25 의 약수가 되어야 하므로

$\therefore\ 4a - 5 = \pm 1,\ \pm 5,\ \pm 25$ 0 이 아닌 a 의 양의 정수값은 $a = 1$

$\therefore\ b = 2$

㉠, ㉡에서 $x = -4y,\ z = 5y$

$\therefore\ x : y : z = (-4) : 1 : 5$