1. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

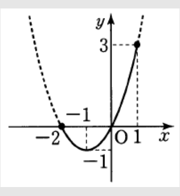
2. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



3. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $f(1) = f(3) = 8$이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로
이차함수는 $f(x) = a(x-2)^2 + 5$ 라고 할 수 있다.
$f(3) = 8$이므로 $x = 3,\ y = 8$을 대입하면
$a + 5 = 8 \quad \therefore\ a = 3$ 이므로
$f(x) = 3(x-2)^2 + 5 = 3x^2 - 12x + 17$
$\therefore\ a + b + c = 8$

5. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

6. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

7. 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$, $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -1$
② $a = -1,\ b = 0$
③ $a = 1,\ b = 0$
④ $a = 1,\ b = -1$
⑤ $a = 0,\ b = 1$

해설

$y = ax^2 + bx + 8 \quad \cdots ①$
$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \cdots ②$
$y = -x + 6 \quad \cdots ③$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로
②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.
②, ③을 연립하여 풀면
교점은 $(2,\ 4),\ (-1,\ 7)$ 이고,
이 두 점을 곡선 ①이 지나므로
$4a + 2b + 8 = 4,\ a - b + 8 = 7$
$\therefore\ a = -1,\ b = 0$

8. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

9. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

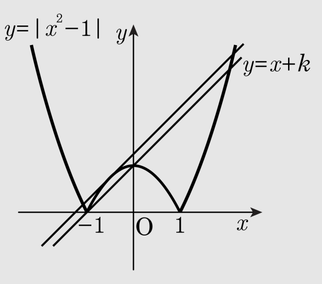
① $1<k<\frac{5}{4}$ ② $1\le k\le\frac{5}{4}$ ③ $-5<k<-\frac{5}{4}$
④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면 다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가 두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0 \quad \therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k \quad \therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$