

1. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수 f 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ 이므로 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$ 이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$ (개)이다.

2. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?
- ① 15개 ② 60개 ③ 120개
④ 125개 ⑤ 243개

해설

「 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1, 2, 3\}$ 이고
 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이므로
일대일 함수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$ (개)

3. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3(x$ 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore g(4) = -3$

$\therefore f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

4. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 8 개

▷ 정답 : 8 개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

5. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $(g \circ f)(1)$ 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 5$$

6. 함수 $f(x) = ||x - 2| - 1| + k$ 에 대하여 $f(-1) = 5$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = 5$ 이므로

$f(-1) = ||-1 - 2| - 1| + k = 2 + k = 5$

따라서 $k = 3$ 이므로

$\therefore f(5) = ||5 - 2| - 1| + 3 = 5$

7. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

8. $2x = 3y = 4z$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2 - z^2}{xy - yz - zx}$ 의 값은?

- ① 6 ② $-\frac{6}{11}$ ③ $\frac{6}{11}$ ④ $-\frac{11}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$$2x = 3y = 4z = k(k \neq 0) \Rightarrow x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}, z = \frac{k}{4}$$

$$\frac{\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{9} - \frac{k^2}{16}}{\frac{k^2}{6} - \frac{k^2}{12} - \frac{k^2}{8}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{8}} = -\frac{11}{6}$$

9. $\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ 을 간단히 하여라.

① $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

② $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{3})}{(1 + 2 + 2\sqrt{2}) - 3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

10. $x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

- ① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$x + y = 4, \quad xy = 1$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \\ &= 4^3 - 3 \times 4 = 52 \end{aligned}$$

11. 함수 $y = \frac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

- ① 점근선 중 하나는 $x = 3$ 이다.
- ② 점근선 중 하나는 $y = 2$ 이다.
- ③ 함수 $y = \frac{2}{x} + 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.
- ④ 이 그래프는 x 축을 지나지 않는다.
- ⑤ 함수 $y = \frac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y = \frac{2x-4}{x-3} = \frac{2(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x = 3$, $y = 2$ 이고

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼,

y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

12. 다음 보기 중 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = \frac{x}{x+1}$

㉡ $y = \frac{2-x}{x-1}$

㉢ $y = \frac{2x-3}{x-2}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y = \frac{1}{x-p} + q$ 의 꼴이다.

㉠ $y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 1$

㉡ $y = \frac{2-x}{x-1} = \frac{-(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1$

㉢ $y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 2$

따라서, 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

13. 분수함수 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a$, $y = b$ 라고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = \frac{3x-1}{x+1} = \frac{-4}{x+1} + 3 \text{ 에서 점근선은}$$

$$x = -1, y = 3$$

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore a + b = 2$$

14. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이고}$$

$$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2 \text{ 이므로}$$

$$a = 2, b = 3, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = 2 + 3 - 2 = 3$$

15. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ($x \geq 2$) 이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

16. 공집합이 아닌 집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

X 는 집합 $\{-2, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

17. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 실수 a 의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$ 에서
 $(x + a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,
 $x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$
즉 $2ax + a^2 - a = 0$
모든 실수 x 에 대해 성립하려면 $a = 0$

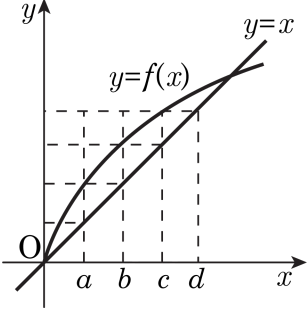
18. 함수 $f(x) = -x$, $g(x) = 2x - 1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

- ① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
 $(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x$, $a(2x - 1) + b = x$
 $x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
 $x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
 $\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

19. $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b + f(b) + f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



- ① b ② $b + d$ ③ $2b + c$
④ $b + c + d$ ⑤ $a + b + c$

해설

그림에서 $f(b) = c$, $f^{-1}(b) = a$ 이므로
 $b + f(b) + f^{-1}(b) = b + c + a$

20. 직선 $y = m|x - 1| + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

해설

$y = m|x - 1| + 2$
i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots \textcircled{1}$
ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots \textcircled{2}$
 m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.

x 절편은 $\textcircled{1}$ 에서 $x = \frac{m-2}{m}$

$\textcircled{2}$ 에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

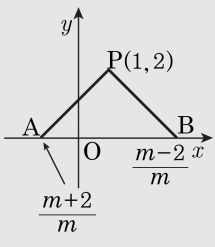
$$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = -\frac{4}{m}$$

$\therefore \triangle PAB$ 의 면적이 10이므로

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$$

$$10m = -4$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



해설

삼각형의 넓이가 10 일 때 높이가 2이므로

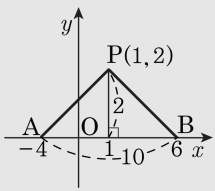
$$\overline{AB} = 10$$

즉 그래프의 x 절편이 -4, 6이다.

$y = m|x - 1| + 2$ 에 (6, 0)을 대입하면

$$0 = m|6 - 1| + 2, 5m = -2$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$

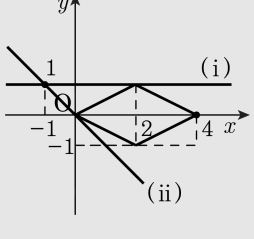


21. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
 $x+2y=2$ 의 그래프에서
 $x\geq 0, y\geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼
평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이
점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m\leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
 $0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m\geq -1$
(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $-1\leq m\leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.



22. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

▷ 정답 : $c = 3$

▷ 정답 : $d = 4$

▷ 정답 : $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \\ \therefore a &= 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 \end{aligned}$$

23. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하여라. (단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} : 3x = z$
 $\therefore x = \frac{z}{3}, y = \frac{5z}{3}$
여기서 $x = k$ 라 하면 $y = 5k, z = 3k$
따라서 $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k^2 - 5k^2 + 25k^2}{k^2 + 25k^2 + 9k^2} = \frac{3}{5} \therefore m = 5, n = 3$
 $\therefore m + n = 8$

24. 유리식 $\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$ 일 때, k 의 값을 구하면? (단, $abc \neq 0$)

- ① 2 또는 -1 ② 0 또는 -1 ③ -1 또는 -1
④ 2 또는 3 ⑤ -2 또는 -1

해설

$$\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$$
$$\frac{b+3c}{2a} = k, \frac{3c+2a}{b} = k, \frac{2a+b}{3c} = k$$

각각 정리하면

$$b+3c = 2ak \cdots \textcircled{1}$$

$$3c+2a = bk \cdots \textcircled{2}$$

$$2a+b = 3ck \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} : 2(b+3c+2a) = k(2a+b+3c)$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ 또는 } 2a+b+3c = 0$$

$2a+b+3c = 0$ 인 경우,

$$\textcircled{1} \text{에 대입해 보면 } -2a = 2ak, k = -1$$

$$\therefore k = 2, -1$$

25. 어떤 시험에서 수험생의 남녀 학생의 비는 3 : 2 이고 합격자의 남녀학생의 비는 6 : 5, 불합격자의 남녀 학생의 비는 12 : 7 이었다. 남학생의 합격률은 ?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{1}{4}$
- ③ $\frac{1}{5}$
- ④ $\frac{1}{6}$
- ⑤ $\frac{1}{7}$

해설

	수험자	합격자	불합격자
남학생	$3k$	$6m$	$12n$
여학생	$2k$	$5m$	$7n$

$3k = 6m + 12n \cdots \textcircled{A}$
 $2k = 5m + 7n \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} \times 7 - \textcircled{B} \times 12$ 에서 $-3k = -18m$
 $\therefore \frac{m}{k} = \frac{1}{6}$
(남학생의 합격률) $= \frac{6m}{3k} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

26. 다음 식이 성립하는 실수 x 의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$ 가 성립되지 않는 범위는 $x+1 < 0$ 이고 $x-2 < 0$

$\therefore x < -1$

따라서 $x < -1$ 일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x < -1\}$ 의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$ 이고 실수 x 의 최솟값은 $\therefore -1$

27. $6 - \sqrt{3}$ 의 정수 부분을 x , 소수부분을 y 라 할 때 $\frac{1}{x} \left(y^3 + \frac{1}{y^3} \right)$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$6 - \sqrt{3} = 4 + (2 - \sqrt{3}) \quad (\because 0 < 2 - \sqrt{3} < 1)$$

$$\therefore x = 4, y = 2 - \sqrt{3}, \frac{1}{y} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore y + \frac{1}{y} = 4,$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = \left(y + \frac{1}{y} \right)^3 - 3 \left(y + \frac{1}{y} \right) = 52$$

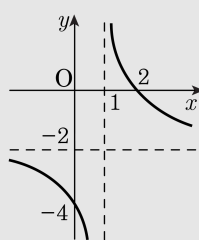
$$\therefore \frac{1}{x} \left(y^3 + \frac{1}{y^3} \right) = \frac{1}{4} \cdot 52 = 13$$

28. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축으로 -1 , y 축으로 -2 만큼 평행이동한 그래프이다.
- ② 치역은 $\mathbb{R} - \{-2\}$ 이다.
- ③ 제 2사분면을 지나지 않는다.
- ④ 점근선은 $x = 1$, $y = -2$ 이다.
- ⑤ 정의역은 $\mathbb{R} - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \frac{2}{x-1} - 2$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.



29. 함수 $f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x = -2$, $y = 4$ 이고, 점 $(3, 1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \frac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y = 4$ 이므로 $f(x) = \frac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

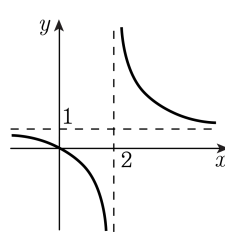
$$\therefore c = -7$$

따라서 $f(x) = \frac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

30. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2



해설

점근선이 $x=2$, $y=1$ 이므로

$$y = \frac{ax+b}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c} \text{ 에서 } a=1, c=-2 \text{ 이다.}$$

그리고 원점을 지나므로 $b=0$ 이다.

$$\therefore a+b+c = -1$$

31. 함수 $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 곡선 $y = g(x)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 곡선 $y = f(x)$ 와 일치한다고 한다. $a + b$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+6}{x+2} \text{ 에서 } x = \frac{-2y+6}{y-1} \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \frac{-2x+6}{x-1}$$

$$\text{그런데 } f(x) = 1 + \frac{4}{x+2}, \quad g(x) = -2 + \frac{4}{x-1}$$

곡선 $g(x)$ 를 x 축 방향으로 -3 만큼,

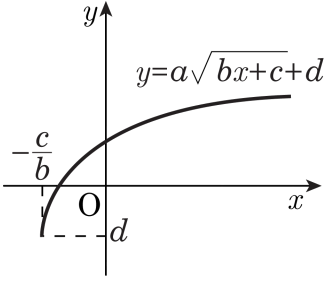
y 축 방향으로 3 만큼 평행이동하면

$y = f(x)$ 와 일치하므로

$$a = -3, b = 3$$

$$\therefore a + b = 0$$

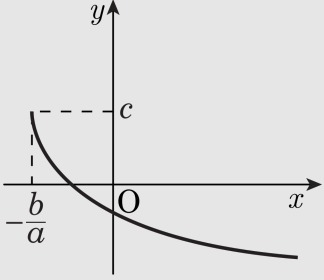
32. 함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 함수 $y = d\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 반드시 지나는 사분면은?



- ① 제 1사분면 ② 제 2사분면 ③ 제 3사분면
- ④ 제 2, 4사분면 ⑤ 제 3, 4사분면

해설

$$\frac{-c}{b} < 0, d < 0, a > 0$$



33. $1 \leq x \leq a$ 일 때, $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 의 최솟값이 m , 최댓값이 6이다.
 $a+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \leq x \leq a$ 에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1} + 3$ 은 증가함수이므로
 $x = 1$ 일때 최솟값을 가진다.

$$\text{곧, } m = \sqrt{2-1} + 3 = 4$$

$$\therefore m = 4$$

또한, $x = a$ 일 때 최댓값을 가지므로

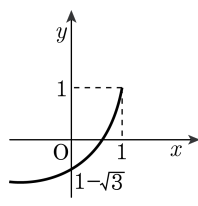
$$6 = \sqrt{2a-1} + 3$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore a + m = 9$$

34. 무리함수 $y = -\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4



해설

주어진 그림은 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를
 x 축 방향으로 1, y 축 방향으로 1만큼 평행이동한
 것이므로 $y-1 = -\sqrt{a(x-1)}$
 즉 $y = -\sqrt{a(x-1)}+1$
 그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$ 을 지나므로
 $1-\sqrt{3} = -\sqrt{-a}+1$,
 $\therefore a = -3$
 $\therefore y = -\sqrt{-3(x-1)}+1$
 $\therefore a+b+c = (-3)+3+1 = 1$

35. $x > 2$ 에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 2$ 일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$$

$$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$$

$$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$$

36. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로

$x = 1, y = 1$ 을 준식에 대입하면

$$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$$

$$\therefore f(0) + f(2) = 1$$

37. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$

{3, 4}로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인 함수의 개수는

 $2^3 = 8$ 인데

이 중에서 지역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2=6$

따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

38. 실수 x 를 입력하면 실수 $\frac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\frac{2}{3}$ 를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

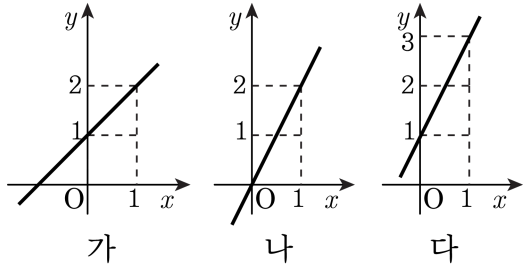
$$f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$$

에서

$$f_1\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_2(-1) = \frac{2}{3}$$
$$f_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_4(-1) = \frac{2}{3} \cdots$$

따라서 $f_{1999}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$

39. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



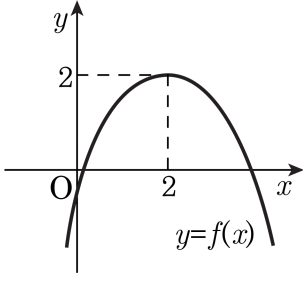
다음 중 $w(x)$ 를 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 이용하여 나타낸 것은?

- ① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f + g$ ⑤ $f - g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면
 $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $w(x) = 2x + 1$ 이다.
 $f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1 = w(x)$ 이므로
 $\therefore w = f \circ g$

40. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

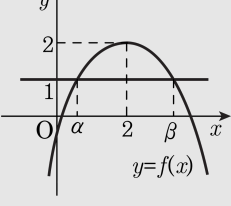


- ① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
 $f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만
 $f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

41. $g(x) = 2 + \frac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은? (단, f^{-1}, g^{-1} 은 $f(x), g(x)$ 의 역함수)

① $\frac{2x-3}{x+2}$
④ $\frac{x+2}{2x-3}$

② $\frac{x-2}{2x+3}$
⑤ $\frac{x-2}{2x-3}$

③ $\frac{2x+3}{x-2}$

해설

$$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = g\{f(x)\}$$

$$\therefore g\{f(x)\} = 2 + \frac{7}{f(x)-2} = x$$

$$\rightarrow \frac{7}{f(x)-2} = x-2$$

$$\rightarrow 7 = \{f(x)-2\}(x-2)$$

$$\rightarrow 7 = xf(x) - 2f(x) - 2x + 4$$

$$\rightarrow 2x + 3 = f(x)(x-2)$$

$$\therefore f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

해설

$$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = x \text{ 에서}$$

$$f(x) = g^{-1}(x)$$

$$g(x) = 2 + \frac{7}{x-2} \text{ 에서 역함수를 구하기 위해 } x, y \text{ 를 바꾸면}$$

$$x = 2 + \frac{7}{y-2}, (x-2)(y-2) = 7$$

$$y-2 = \frac{7}{x-2}, y = \frac{7}{x-2} + 2 = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$\therefore f(x) = g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

42. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4, g(x) = -2x + 3$ 이고 $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4, g(x) = -2x + 3$ 에 대하여

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로

$g^{-1} \circ h = f \circ f, h = g \circ f \circ f$

$\therefore h(x) = g(f(f(x)))$

$= g(f(x + 4))$

$= g((x + 4) + 4)$

$= g(x + 8)$

$= -2(x + 8) + 3 = -2x - 13$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$

$-2a - 13 = 5, -2a = 18$

$\therefore a = -9$

$\therefore h^{-1}(5) = -9$

43. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ($x \geq 0$) 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
 $\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0, 0)$, $(2, 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

44. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$, $B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}$, $C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \frac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

- ① $A > B > C$

② $A \geq B = C$

③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$

⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{7}} = \frac{1}{\frac{12}{7}} = \frac{7}{12}$$

$$B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}} = \frac{9}{11}$$

$$C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{14}} = \frac{14}{17}$$

$$\therefore A = \frac{7}{12}, B = \frac{9}{11}, C = \frac{14}{17}$$

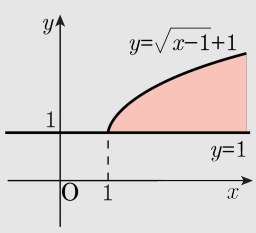
$$\therefore A < B < C$$

45. 실수 x, y 가 $1 \leq y \leq \sqrt{x-1} + 1$ 을 만족시킬 때, $\frac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값을 a 과 최솟값을 b 라 할 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$1 \leq y \leq \sqrt{x-1} + 1$ 을 만족시키는 영역은
다음 그림의 색칠된 부분 (경계선 포함)과 같다.



$$\frac{y-2}{x+1} = k (k \text{ 는 상수}) \text{ 로 놓으면}$$

$$y - 2 = k(x + 1) \cdots \textcircled{1} \text{ 이므로}$$

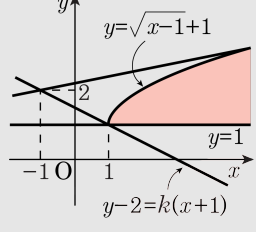
$\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.

(i) $\textcircled{1}$ 이 함수

$y = \sqrt{x-1} + 1$ 의 그래프에 접할 때,

$kx + k + 2 = \sqrt{x-1} + 1$ 에서 $kx + k +$

$$1 = \sqrt{x-1}$$



양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 x^2 + (2k^2 + 2k - 1)x + k^2 + 2k + 2 = 0,$$

$$D = 0 \text{ 이므로 } 8k^2 + 4k - 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} (\because k > 0)$$

(ii) $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지난다 때, $-1 = k \cdot 2$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

(i), (ii) 에서 $\frac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값 $a = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$,

최솟값 $b = -\frac{1}{2}$ 이므로

$$\therefore 2a - b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

46. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 다음 중 함수 $f(2x)$ 의 역함수는?

① $g(2x)$

② $g\left(\frac{1}{2}x\right)$

③ $\frac{1}{2}g(x)$

④ $\frac{1}{2}g(2x)$

⑤ $2g\left(\frac{1}{2}x\right)$

해설

$h(x) = 2x$ 라고 하면

$$f(2x) = f(h(x)) = (f \circ h)(x)$$

한편, $(f \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ f^{-1}$ 이고,

$$f^{-1}(x) = g(x), \quad h^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \text{ 이므로}$$

$$(f \circ h)^{-1}(x) = (h^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$= h^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$= h^{-1}(g(x))$$

$$= \frac{1}{2}g(x)$$

$$\therefore f^{-1}(2x) = (f \circ h)^{-1}(x) = \frac{1}{2}g(x)$$

47. $x + y + z = 3$ 일 때

$\frac{(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$ 의 값은 ?

- ① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

$x + y + z = 3$ 일 때, $x + y + z - 3 = 0$

$\therefore (x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$

$x-1 = A, y-1 = B, z-1 = C$ 라 하면

$(A+B+C)^2$

$= A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA) \cdots \textcircled{1}$

준식 $= \frac{AB + BC + CA}{A^2 + B^2 + C^2}$

① 에서 양변을 $A^2 + B^2 + C^2$ 으로 나누면

$\frac{(A+B+C)^2}{A^2 + B^2 + C^2} = 1 + \frac{2(AB + BC + CA)}{A^2 + B^2 + C^2} = 0$

($\because A + B + C = 0$)

$\therefore \frac{AB + BC + CA}{A^2 + B^2 + C^2} = -\frac{1}{2}$

48. a, b 는 실수이고 $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$, $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$ 일 때, $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ 의 값은 ?

- ① $-2\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52 \cdots \textcircled{1} \\ (ab)^3 &= a^3b^3 = (26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3}) = 1 \\ \therefore ab &= 1, \quad a+b=t \text{로 놓으면} \\ \textcircled{1} \text{에서 } t^3 - 3t - 52 &= 0, \quad (t-4)(t^2 + 4t + 13) = 0 \\ a, b \text{가 실수이므로 } t &\text{도 실수이다.} \\ \therefore t &= 4, \text{ 즉 } a+b = 4 \\ (\text{준식}) &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b} \\ a+b &= 4, \quad ab = 1 \text{이므로} \\ a, b \text{는 } x^2 - 4x + 1 &= 0 \text{의 근이고} \\ a^3 > b^3 \text{이므로 } a > b \\ \therefore a &= 2 + \sqrt{3}, \quad b = 2 - \sqrt{3} \\ \therefore a-b &= 2\sqrt{3} \\ \therefore (\text{준식}) &= \frac{4+2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

49. $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}}=b+c\sqrt{2}$ 를 만족시키는 양의 정수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?

- ① 13
- ② 15
- ③ 17
- ④ 19
- ⑤ 21

해설

양변을 세제곱하면
 $20+a\sqrt{2}=(b+c\sqrt{2})^3$
 $=b^3+3b^2c\sqrt{2}+3bc^2\cdot 2+c^3\cdot 2\sqrt{2}$
 $(3b^2c+2c^3-a)\sqrt{2}+b^3+6bc^2-20=0$
 $\therefore 3b^2c+2c^3-a=0$ 에서 $c(3b^2+2c^2)=a \quad \cdots \textcircled{1}$
 $b^3+6bc^2-20=0$ 에서 $b(b^2+6c^2)=20\cdots \textcircled{2}$
 b, c 는 양의 정수이므로
 $b^2+6c^2=10, b=2, c=1$
 $\textcircled{1}$ 에서 $a=14 \quad \therefore a+b+c=17$

50. 다음 연립부등식의 영역의 넓이를 구하여라.

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y \leq \sqrt{3x+9} \\ y \geq \sqrt{3x} \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 & \dots \textcircled{1} \\ y \leq \sqrt{3x+9} & \dots \textcircled{2} \\ y \geq \sqrt{3x} & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

②의 경계선은 ③의 그것을 x 축 방향으로 -3 만큼 평행 이동한 것이다. 따라서 주어진 부등식의 영역을 그림으로 표현하면 위와 같다. 색칠된 부분의 넓이는 가로, 세로가 각각 3, 2인 직사각형의 넓이와 같다. 따라서 넓이는 $3 \times 2 = 6$

