1. 집합 $X=\{-1,0,1,2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 $f(x)=|x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1)=f(1)=1,\ f(0)=0,\ f(2)=2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0,1,2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3=8$(개)이다.

2. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 X의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$일 때, $f(x_1) \neq (x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 15개 ② 60개 ③ 120개

④ 125개 ⑤ 243개

해설

「$x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$」는
일대일 함수를 의미한다.
즉, $X = \{1,\ 2,\ 3\}$이고
$Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이므로
일대일 함수는 $5 \times 4 \times 3 = 60$(개)

3. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$(x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore\ f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore\ g(4) = -3$

$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

4. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$2 \times 2 \times 2 = 8$(개)

5. 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=2x-1$에 대하여 $(g\circ f)(1)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=5$

6. 함수 $f(x) = || x-2|-1| + k$ 에 대하여 $f(-1) = 5$ 를 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = 5$ 이므로

$f(-1) = ||-1-2|-1| + k = 2 + k = 5$

따라서 $k = 3$ 이므로

$\therefore\ f(5) = ||5-2|-1| + 3 = 5$

7. $\dfrac{x+1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1, \quad a=-1$

$\therefore \ a=-1, \quad b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

8. $2x=3y=4z$일 때, $\dfrac{x^2-y^2-z^2}{xy-yz-zx}$의 값은?

① 6 ② $-\dfrac{6}{11}$ ③ $\dfrac{6}{11}$ ④ $-\dfrac{11}{6}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

해설

$2x=3y=4z=k(k\neq 0) \Rightarrow x=\dfrac{k}{2},\ y=\dfrac{k}{3},\ z=\dfrac{k}{4}$

$$\frac{\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{9}-\frac{k^2}{16}}{\frac{k^2}{6}-\frac{k^2}{12}-\frac{k^2}{8}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}}=-\frac{11}{6}$$

9. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 을 간단히 하여라.

① $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

해설

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1+2+2\sqrt{2})-3}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

10. $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$$x = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$$x+y = 4, \quad xy = 1$$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 4^3 - 3\times 4 = 52 \end{aligned}$$

11. 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$$y=\frac{2x-4}{x-3}=\frac{2(x-3)+2}{x-3}=\frac{2}{x-3}+2$$

그러므로 함수의 점근선은 $x=3,\ y=2$이고

$y=\dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 3만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

12. 다음 보기 중 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 을 평행이동하여 겹칠 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $y=\frac{x}{x+1}$　　ㄴ $y=\frac{2-x}{x-1}$　　ㄷ $y=\frac{2x-3}{x-2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

$y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 $y=\frac{1}{x-p}+q$ 의 꼴이다.

ㄱ $y=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}+1$

ㄴ $y=\frac{2-x}{x-1}=\frac{-(x-1)+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}-1$

ㄷ $y=\frac{2x-3}{x-2}=\frac{2(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+2$

따라서, 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 을 평행이동하여

겹칠 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

13. 분수함수 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x=a$, $y=b$ 라고 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=\dfrac{3x-1}{x+1}=\dfrac{-4}{x+1}+3$ 에서 점근선은

$x=-1,\ y=3$

$a=-1,\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

14. 함수 $y = \sqrt{-4x+12} - 2$ 는 함수 $y = a\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$y = \sqrt{-4(x-3)} - 2 = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이고

$y = 2\sqrt{-x} \xrightarrow[y\text{축 } -2]{x\text{축 } 3} y = 2\sqrt{-(x-3)} - 2$ 이므로

$a = 2, b = 3, c = -2$

$\therefore\ a + b + c = 2 + 3 - 2 = 3$

15. 함수 $y = \sqrt{x-1}+2$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(3)$의 값은?

① 3 ② 2 ③ 0

④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1}+2$에서

$y-2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2-4y+4 = x-1$

$x = y^2-4y+4+1$

따라서 $g(x) = x^2-4x+5\ (x \geq 2)$이므로

$g(3) = 3^2-4\cdot 3+5 = 9-12+5 = 2$

16. 공집합이 아닌 집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x) = g(x)$

즉 $x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$

$x^2 = 4$

$\therefore \; x = \pm 2$

X는 집합 $\{-2, \; 2\}$의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

17. 두 함수 $f(x) = x + a$, $g(x) = x^2 - 1$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$가 성립하도록 실수 a의 값을 정하면?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ 1 ⑤ 4

해설

$g \circ f = f \circ g$에서

$(x+a)^2 - 1 = x^2 - 1 + a$,

$x^2 + 2ax + a^2 - 1 = x^2 - 1 + a$

즉 $2ax + a^2 - a = 0$

모든 실수 x에 대해 성립하려면 $a = 0$

18. 함수 $f(x)=-x,\ g(x)=2x-1$ 일 때, $(h\circ g\circ f)(x)=f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y=\frac{1}{4}x+2$　② $y=\frac{1}{4}x-2$　③ $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

④ $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$　⑤ $y=\frac{1}{2}x+2$

해설

$h(x)=ax+b$ 라고 놓으면,

$(h\circ g\circ f)x=(h\circ g)(f(x))=f(x)$ 에서 $h\circ g=I$

즉 $(h\circ g)(x)=x,\ a(2x-1)+b=x$

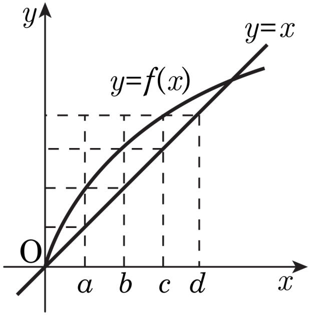
$x=1$ 일 때, $a+b=1$

$x=0$ 일 때, $-a+b=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

따라서 $h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

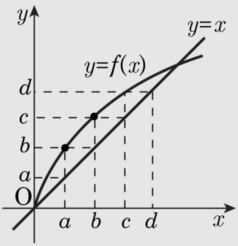
19. $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b+f(b)+f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



① b　　② $b+d$　　③ $2b+c$

④ $b+c+d$　　⑤ $a+b+c$

해설



그림에서 $f(b)=c,\ f^{-1}(b)=a$ 이므로

$b+f(b)+f^{-1}(b)=b+c+a$

20. 직선 $y = m\,|\,x-1\,|\,+2$ 와 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10일 때, m의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

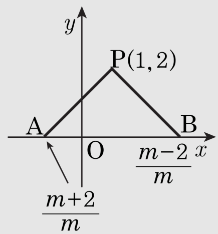
해설

$y = m\,|\,x-1\,|\,+2$

ⅰ) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots$ ㉠

ⅱ) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots$ ㉡

m 에 관계없이 정점 (1, 2)을 지난다.



x절편은 ㉠에서 $x = \dfrac{m-2}{m}$

㉡에서 $x = \dfrac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이는

$\dfrac{m-2}{m} - \dfrac{m+2}{m} = \dfrac{-4}{m}$

$\therefore$ △PAB의 면적이 10이므로

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\dfrac{4}{m}\right) = 10$

$10m = -4$

$\therefore\ m = -\dfrac{2}{5}$

해설

삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

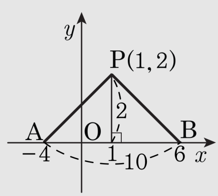
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$

즉 그래프의 x절편이 $-4,\ 6$이다.

$y = m\,|\,x-1\,|\,+2$에 $(6,\ 0)$을 대입하면

$0 = m\,|\,6-1\,|\,+2,\ 5m = -2$

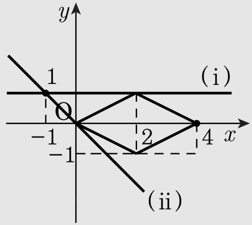
$\therefore m = -\dfrac{2}{5}$



21. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$이 만나도록 하는 m의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
$|x|+2|y|=2$ 의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것
이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는
$x+2y=2$ 의 그래프에서
$x\geq 0$, $y\geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한
것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼
평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는
다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이
점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(i) $m\leq 0$
(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m\geq -1$
(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $-1\leq m\leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

22. 등식 $\dfrac{225}{157}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

▷ 정답 : $b=2$

▷ 정답 : $c=3$

▷ 정답 : $d=4$

▷ 정답 : $e=5$

해설

$$\frac{225}{157}=1+\frac{68}{157}=1+\cfrac{1}{\cfrac{157}{68}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5$

23. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots$㉠

$x-2y+3z=0\cdots$㉡

㉠$\times 2-$㉡ $: 3x=z$

$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}\quad \therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

24. 유리식 $\dfrac{b+3c}{2a}=\dfrac{3c+2a}{b}=\dfrac{2a+b}{3c}=k$일 때, k의 값을 구하면? (단, $abc \neq 0$)

① 2또는 −1 ② 0또는 −1 ③ −1또는 −1

④ 2또는 3 ⑤ −2또는 −1

해설

$$\frac{b+3c}{2a}=\frac{3c+2a}{b}=\frac{2a+b}{3c}=k$$

$$\frac{b+3c}{2a}=k,\ \frac{3c+2a}{b}=k,\ \frac{2a+b}{3c}=k$$

각각 정리하면

$b+3c=2ak\cdots$①

$3c+2a=bk\cdots$②

$2a+b=3ck\cdots$③

①+②+③ : $2(b+3c+2a)=k(2a+b+3c)$

$\Rightarrow k=2$ 또는 $2a+b+3c=0$

$2a+b+3c=0$인 경우,

①에 대입해 보면 $-2a=2ak,\ k=-1$

$\therefore k=2,\ -1$

25. 어떤 시험에서 수험생의 남녀 학생의 비는 3 : 2 이고 합격자의 남녀학생의 비는 6 : 5, 불합격자의 남녀 학생의 비는 12 : 7 이었다. 남학생의 합격률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

해설

	수험자	합격자	불합격자
남학생	$3k$	$6m$	$12n$
여학생	$2k$	$5m$	$7n$

$3k = 6m + 12n \cdots$ ㉠

$2k = 5m + 7n \cdots$ ㉡

㉠ $\times 7 -$ ㉡ $\times 12$ 에서 $-3k = -18m$

$\therefore \frac{m}{k} = \frac{1}{6}$

(남학생의 합격률) $= \frac{6m}{3k} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

26. 다음 식이 성립하는 실수 x의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$가 성립되지 않는 범위는

$x+1<0$ 이고 $x-2<0$

$\therefore\ x<-1$

따라서 $x<-1$ 일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x<-1\}$의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$이고 실수 x의 최솟값은 $\therefore\ -1$

27. $6-\sqrt{3}$의 정수 부분을 x, 소 수부분을 y라 할 때 $\frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$6-\sqrt{3}=4+(2-\sqrt{3})\ (\because 0<2-\sqrt{3}<1\ )$

$\therefore x=4,\ y=2-\sqrt{3},\ \frac{1}{y}=2+\sqrt{3}$

$\therefore y+\frac{1}{y}=4,$

$$y^3+\frac{1}{y^3}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\frac{1}{y}\right)=52$$

$\therefore \frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=\frac{1}{4}\cdot 52=13$

28. $y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축으로 -1, y축으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

② 치역은 $R - \{-2\}$ 이다.

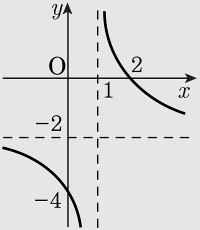
③ 제 2사분면을 지나지 않는다.

④ 점근선은 $x = 1,\ y = -2$ 이다.

⑤ 정의역은 $R - \{1\}$ 이다.

해설

$y = \dfrac{2}{x-1} - 2$의 그래프는 $y = \dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프로 다음 그림과 같다.
따라서 옳지 않은 것은 ①이다.



29. 함수 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 의 점근선은 $x=-2$, $y=4$ 이고, 점 $(3,1)$ 을 지난다고 한다. 이 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = \dfrac{bx+c}{x+d}$ 에 대하여

점근선이 $x=-2$ 이므로 $f(x) = \dfrac{bx+c}{x+2}$

점근선이 $y=4$ 이므로 $f(x) = \dfrac{4x+c}{x+2}$

이것이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로

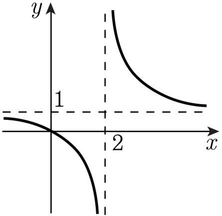
$$1 = \frac{12+c}{3+2}$$

$\therefore\ c=-7$

따라서 $f(x) = \dfrac{4x-7}{x+2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{-3}{3} = -1$$

30. 함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?



① -2　　② -1　　③ 0

④ 1　　⑤ 2

해설

점근선이 $x=2,\ y=1$ 이므로

$y = \dfrac{ax+b}{x+c} = a + \dfrac{b-ac}{x+c}$ 에서 $a=1,\ c=-2$ 이다.

그리고 원점을 지나므로 $b=0$ 이다.

$\therefore\ \ a+b+c=-1$

31. 함수 $f(x)=\dfrac{x+6}{x+2}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 a만큼 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 곡선 $y=f(x)$와 일치한다고 한다. $a+b$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=\dfrac{x+6}{x+2}$ 에서 $x=\dfrac{-2y+6}{y-1}$ 이므로

$g(x)=\dfrac{-2x+6}{x-1}$

그런데 $f(x)=1+\dfrac{4}{x+2}$, $g(x)=-2+\dfrac{4}{x-1}$

곡선 $g(x)$를 x축 방향으로 -3만큼,

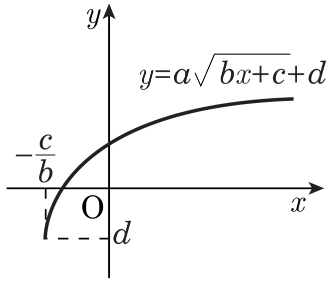
y축 방향으로 3만큼 평행이동하면

$y=f(x)$와 일치하므로

$a=-3, b=3$

$\therefore a+b=0$

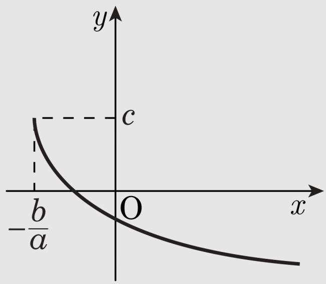
32. 함수 $y = a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 함수 $y = d\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 반드시 지나는 사분면은?



① 제 1사분면 ② 제 2사분면 ③ 제 3사분면
④ 제 2, 4사분면 ⑤ 제 3, 4사분면

해설

$\frac{-c}{b} < 0, d < 0, a > 0$



33. $1 \leq x \leq a$일 때, $y = \sqrt{2x-1}+3$의 최솟값이 m, 최댓값이 6이다. $a+m$의 값을 구하여라.

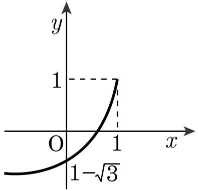
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$1 \leq x \leq a$에서, 함수 $y = \sqrt{2x-1}+3$은 증가함수이므로
$x=1$ 일때 최솟값을 가진다.
곧, $m = \sqrt{2-1}+3 = 4$
$\therefore m = 4$
또한, $x = a$일 때 최댓값을 가지므로
$6 = \sqrt{2a-1}+3$
$\therefore a = 5$
$\therefore a+m = 9$

34. 무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 그림은 $y=-\sqrt{ax}$ 의 그래프를
x축 방향으로 1, y축 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 $y-1=-\sqrt{a(x-1)}$
즉 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$
그런데 이 그래프가 점 $(0, 1-\sqrt{3})$을 지나므로
$1-\sqrt{3}=-\sqrt{-a}+1$,
$\therefore a=-3$
$\therefore\ y=-\sqrt{-3(x-1)}+1$
$\therefore\ a+b+c=(-3)+3+1=1$

35. $x > 2$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = \sqrt{x-2}+2$, $g(x) = \dfrac{1}{x-2}+2$일 때 $(f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$(f \cdot g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 3$

$(g \cdot f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 3$

$\therefore (f \cdot g)(3) + (g \cdot f)(3) = 6$

36. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y),\ f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1,\ y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

37. 집합 $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 에서 치역의 원소의 개수가 2 개인 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 36 개

해설

원소가 2 개인 치역은

$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$,

$\{3,\ 4\}$로 6 개이다.

정의역의 원소가 3 개, 공역의 원소가 2 개인함수의 개수는

$2^3 = 8$ 인데

이 중에서 치역의 원소가 1 개인 함수가 각각 2 개이므로 $8-2 = 6$

따라서 $6 \times 6 = 36$ 개

38. 실수 x를 입력하면 실수 $\dfrac{x-1}{2x-1}$ 이 출력되어 나오는 기계가 있다. 이 기계에 $\dfrac{2}{3}$ 를 입력하여 출력되어 나온 결과를 다시 입력하고 또 출력된 결과를 다시 입력하는 과정을 1999 번 반복하였을 때, 마지막으로 출력되어 나오는 결과를 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

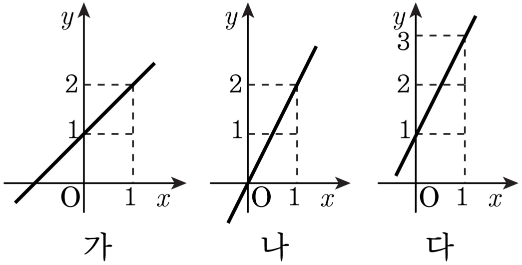
$f(x)=\dfrac{x-1}{2x-1}$ 에서

$f_1\left(\dfrac{2}{3}\right)=-1,\ f_2(-1)=\dfrac{2}{3}$

$f_3\left(\dfrac{2}{3}\right)=-1,\ f_4(-1)=\dfrac{2}{3}\cdots$

따라서 $f_{1999}\left(\dfrac{2}{3}\right)=-1$

39. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



다음 중 $w(x)$를 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 나타낸 것은?

① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f+g$ ⑤ $f-g$

해설

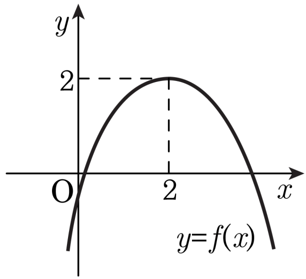
그래프를 보고 함수식을 구하면

$f(x)=x+1,\ g(x)=2x,\ w(x)=2x+1$ 이다.

$f(g(x))=f(2x)=2x+1=w(x)$ 이므로

$\therefore\ w=f \circ g$

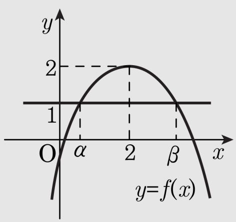
40. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$을 만족하는 t의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$를 만족하는 x의 값은 2개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$을 만족하는 x의 값은 2개이다.

41. $g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-2}$ 에 대해 $(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = x$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 값은?(단, $f^{-1},\ g^{-1}$ 은 $f(x),\ g(x)$ 의 역함수)

① $\dfrac{2x-3}{x+2}$　　② $\dfrac{x-2}{2x+3}$　　③ $\dfrac{2x+3}{x-2}$

④ $\dfrac{x+2}{2x-3}$　　⑤ $\dfrac{x-2}{2x-3}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = g\{f(x)\}$

$\therefore\ g\{f(x)\} = 2 + \dfrac{7}{f(x)-2} = x$

$\rightarrow\ \dfrac{7}{f(x)-2} = x-2$

$\rightarrow\ 7 = \{f(x)-2\}(x-2)$

$\rightarrow\ 7 = xf(x) - 2f(x) - 2x + 4$

$\rightarrow\ 2x + 3 = f(x)(x-2)$

$\therefore\ f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

해설

$(f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(x) = (g \circ f)(x) = x$ 에서

$f(x) = g^{-1}(x)$

$g(x) = 2 + \dfrac{7}{x-2}$ 에서 역함수를 구하기 위해 x, y 를 바꾸면

$x = 2 + \dfrac{7}{y-2}$, $(x-2)(y-2) = 7$

$y - 2 = \dfrac{7}{x-2}$, $y = \dfrac{7}{x-2} + 2 = \dfrac{2x+3}{x-2}$

$\therefore f(x) = g^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

42. 세 함수 f, g, h 에 대하여 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 이고 $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ h)(x) = f(x)$ 가 성립할 때, $h^{-1}(5)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -9

해설

두 함수 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -2x + 3$ 에 대하여

$f^{-1} \circ g^{-1} \circ h = f$ 이므로

$g^{-1} \circ h = f \circ f$, $h = g \circ f \circ f$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= g(f(f(x))) \\ &= g(f(x+4)) \\ &= g((x+4)+4) \\ &= g(x+8) \\ &= -2(x+8)+3 = -2x-13 \end{aligned}$$

$h^{-1}(5) = a$ 라고 하면 $h(a) = 5$

$-2a - 13 = 5$, $-2a = 18$

$\therefore a = -9$

$\therefore\ h^{-1}(5) = -9$

43. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
$\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$
$\therefore\ x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

44. $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, $B=\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}}$, $C=\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x=\dfrac{2}{5}$ 일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A>B>C$　② $A \geq B=C$　③ $A<B<C$

④ $A \leq B=C$　⑤ $A=B=C$

해설

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2}{7}}=\frac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{7}{9}$$

$$B=\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+5}}=\frac{1}{\frac{8}{7}}=\frac{7}{8}$$

$$C=\frac{3}{3+\frac{3}{3+\frac{3}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{2}}}=\frac{1}{\frac{23}{21}}=\frac{21}{23}$$

$$\therefore\ A=\frac{21}{27},\ B=\frac{21}{24},\ C=\frac{21}{23}$$

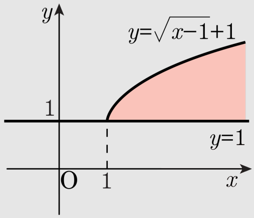
$$\therefore A<B<C$$

45. 실수 x, y 가 $1 \le y \le \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시킬 때, $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값을 a 과 최솟값을 b 라 할 때, $2a-b$ 의 값을 구하면?

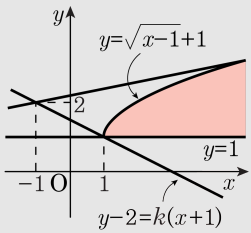
① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$1 \le y \le \sqrt{x-1}+1$ 을 만족시키는 영역은
다음 그림의 색칠된 부분(경계선 포함)과 같다.



$\dfrac{y-2}{x+1} = k$(k 는 상수) 로 놓으면
$y-2 = k(x+1) \cdots$ ㉠ 이므로
㉠은 k 의 값에 관계없이 점$(-1,\ 2)$ 를 지난다.
(i) ㉠이 함수
$y = \sqrt{x-1}+1$ 의 그래프에 접할 때,
$kx+k+2 = \sqrt{x-1}+1$ 에서 $kx+k+1 = \sqrt{x-1}$



양변을 제곱하여 정리하면
$k^2x^2 + (2k^2+2k-1)x + k^2 + 2k + 2 = 0$,
$D = 0$ 이므로 $8k^2 + 4k - 1 = 0$

$\therefore k = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{8} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} (\because k > 0)$

(ii) ㉠이 점$(1,\ 1)$ 을 지날 때, $-1 = k \cdot 2$

$\therefore k = -\dfrac{1}{2}$

(i), (ii) 에서 $\dfrac{y-2}{x+1}$ 의 최댓값 $a = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$,

최솟값 $b = -\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\therefore 2a-b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

46. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 다음 중 함수 $f(2x)$ 의 역함수는?

① $g(2x)$ ② $g\left(\frac{1}{2}x\right)$ ③ $\frac{1}{2}g(x)$

④ $\frac{1}{2}g(2x)$ ⑤ $2g\left(\frac{1}{2}x\right)$

해설

$h(x)=2x$ 라고 하면

$f(2x)=f(h(x))=(f\circ h)(x)$

한편, $(f\circ h)^{-1}=h^{-1}\circ f^{-1}$ 이고,

$f^{-1}(x)=g(x),\ h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$ 이므로

$$\begin{aligned}(f\circ h)^{-1}(x)&=\left(h^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)\\&=h^{-1}(f^{-1}(x))\\&=h^{-1}(g(x))\\&=\frac{1}{2}g(x)\end{aligned}$$

$\therefore f^{-1}(2x)=(f\circ h)^{-1}(x)=\frac{1}{2}g(x)$

47. $x+y+z=3$일 때

$\dfrac{(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$ 의 값은 ?

① 0 ② 1 ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

$x+y+z=3$일 때, $x+y+z-3=0$

$\therefore\ (x-1)+(y-1)+(z-1)=0$

$x-1=A,\ y-1=B,\ z-1=C$라 하면

$(A+B+C)^2$

$=A^2+B^2+C^2+2(AB+BC+CA)\cdots$①

준식$=\dfrac{AB+BC+CA}{A^2+B^2+C^2}$

① 에서 양변을 $A^2+B^2+C^2$ 으로 나누면

$$\frac{(A+B+C)^2}{A^2+B^2+C^2}=1+\frac{2(AB+BC+CA)}{A^2+B^2+C^2}=0$$

$(\because\ A+B+C=0)$

$$\therefore\ \frac{AB+BC+CA}{A^2+B^2+C^2}=-\frac{1}{2}$$

48. a, b는 실수이고 $a^3 = 26 + 15\sqrt{3}$, $b^3 = 26 - 15\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$의 값은?

① $-2\sqrt{3}$　② $-\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{3}$　⑤ 1

해설

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

$= 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52 \cdots$ ①

$(ab)^3 = a^3b^3 = (26 + 15\sqrt{3})(26 - 15\sqrt{3}) = 1$

$\therefore\ ab = 1$, $a + b = t$로 놓으면

① 에서 $t^3 - 3t - 52 = 0$, $(t-4)(t^2 + 4t + 13) = 0$

a, b가 실수이므로 t도 실수이다.

$\therefore\ t = 4$, 즉 $a + b = 4$

$$(\text{준식}) = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b}$$

$a + b = 4$, $ab = 1$이므로

a, b는 $x^2 - 4x + 1 = 0$의 근이고

$a^3 > b^3$이므로 $a > b$

$\therefore\ a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$

$\therefore\ a - b = 2\sqrt{3}$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{4 + 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

49. $\sqrt[3]{20+a\sqrt{2}}=b+c\sqrt{2}$를 만족시키는 양의 정수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

해설

양변을 세제곱하면

$20+a\sqrt{2}=(b+c\sqrt{2})^3$

$=b^3+3b^2c\sqrt{2}+3bc^2\cdot\ 2+c^3\cdot\ 2\sqrt{2}$

$(3b^2c+2c^3-a)\sqrt{2}+b^3+6bc^2-20=0$

$\therefore\ 3b^2c+2c^3-a=0$ 에서 $c(3b^2+2c^2)=a\quad\cdots$㉠

$b^3+6bc^2-20=0$에서 $b(b^2+6c^2)=20\cdots$㉡

b, c는 양의 정수이므로

$b^2+6c^2=10$, $b=2$, $c=1$

㉠에서 $a=14\quad\therefore\ a+b+c=17$

50. 다음 연립부등식의 영역의 넓이를 구하여라.

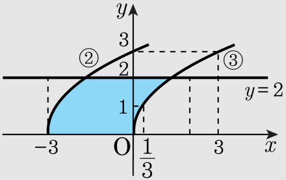
$$\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ y \le \sqrt{3x+9} \\ y \ge \sqrt{3x} \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{cases} 0 \le y \le 2 & \cdots ① \\ y \le \sqrt{3x+9} & \cdots ② \\ y \ge \sqrt{3x} & \cdots ③ \end{cases}$$



② 의 경계선은 ③ 의 그것을 x축 방향으로 -3만큼 평행 이동한 것이다. 따라서 주어진 부등식의 영역을 그림으로 표현하면 위와 같다. 색칠된 부분의 넓이는 가로, 세로가 각각 3, 2 인 직사각형의 넓이와 같다. 따라서 넓이는 $3 \times 2 = 6$