

1. 다음 중 주어진 조건에 의해 그 대상을 분명히 알 수 있는 것이 아닌 것을 모두 고르면? (정답 2개)
- ① 1 보다 작은 자연수의 모임
 - ② 신기한 재주를 갖고 있는 사람들의 모임
 - ③ 분자가 1 인 분수의 모임
 - ④ 4 보다 작은 4 의 배수의 모임
 - ⑤ 큰 수들의 모임

해설

- ② ‘신기한’ 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.
- ⑤ ‘큰’ 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

2. 4의 배수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

③ $8 \in A$

④ $10 \in A$

⑤ $12 \notin A$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{4, 8, 12, \dots\}$ 이다.
따라서 $8 \in A$

3. 다음 중 옳지 않게 연결된 것은?

- ① $\{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\} = \{1, 3, 5\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 10\text{이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 12\text{의 약수}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 20\text{미만의 } 4\text{의 배수}\} = \{4, 8, 12, 16\}$
- ⑤ $\{x \mid x = 2 \times n + 1, 1 \leq n \leq 3, n \text{은 자연수}\} = \{3, 5, 7\}$

해설

① $\{x \mid x \text{는 } 5\text{보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다.

4. $A = \{x \mid x \text{는 } 16\text{의 약수}\}$, $B = \{2, 4, 7, 9, 10\}$ 일 때, $n(A) + n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이므로 $n(A) = 5$

$\therefore n(A) + n(B) = 5 + 5 = 10$

5. 세 집합 $A = \{x|x \text{는 } 21 \text{의 약수}\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{x|x \text{는 } 21 \text{ 이하의 자연수}\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낸 것으로 옳은 것을 골라라.

- ① $B \subset A = C$ ② $B \subset C \subset A$ ③ $B \subset A \subset C$
④ $A \subset B \subset C$ ⑤ $A = B \subset C$

해설

$A = \{1, 3, 7, 21\}$, $B = \{3, 7\}$, $C = \{1, 2, 3, \dots, 20, 21\}$
 $\therefore B \subset A \subset C$

6. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소는 포함하지 않는 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{0\}$

▷ 정답 : $\{0, 1\}$

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소 2를 포함하지 않는 부분집합을 원소의 개수별로 차례대로 구하면 $\{0\}$, $\{0, 1\}$ 이다

7. 집합 $A = \{6, 12, 18, \dots\}$, $B = \{12, 24, 36, \dots\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 조건
제시법으로 바르게 나타낸 것은?

① $\emptyset$

② $\{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 배수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$

해설

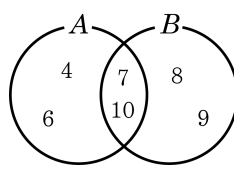
$A \cap B$ 은 집합 A 에도 속하고 B 에도 속하는 집합을 의미한다.

$A \cap B = \{12, 24, 36, \dots\}$ 이므로

조건제시법으로 고쳐보면

$A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 배수}\}$ 가 된다.

8. 다음 벤 다이어그램에서 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$A \cup B$ 은 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소를 합한 집합이다.
그러므로 벤 다이어그램에서 보는 것과 같이 $A \cup B = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.
 $A \cup B$ 의 원소의 합은 $4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 44$

9. 집합 A 에 대하여 안에 공통으로 들어가는 집합을 써넣라.

(1) $A \cup \emptyset =$

(2) $A \cap A =$

(3) $A \cup A =$

▶ 답 :

▶ 정답 : A

해설

(1) $\emptyset$ 은 집합 A 에 포함되므로 $A \cup \emptyset = A$ 이다.

(2) $A \cap A = A$

(3) $A \cup A = A$

10. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 8\}$ 일 때, $(A - B) \subset X$, $X - A = \emptyset$ 을 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{5, 7\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

11. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 에 대하여, $(A - B)^c - B$ 를 간단히 한 것을 다음 중 고르면?

- ① $(A \cup B)^c$
- ② $(A \cup B)$
- ③ $A \cap B^c$
- ④ $A^c \cup B$
- ⑤ $A^c \cup B^c$

해설

$$\begin{aligned}(A - B)^c - B &= (A \cap B^c)^c \cap B^c = (A^c \cup B) \cap B^c = (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\ &= (A \cup B)^c \cup \emptyset = (A \cup B)^c\end{aligned}$$

12. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

- ① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = -3$
- ③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

- ① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
- ⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

13. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여
 $(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$
 $= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$
 $= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면
 a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.
따라서 $ab < 0$

14. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ① $x = y$ ② $xy > 0$ ③ $xy \geq 0$
④ $x \geq 0, y \geq 0$ ⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

15. $x > 3$ 일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$ 의 최솟값은?

① 3

② 5

③ 12

④ 15

⑤ 17

해설

$$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$$

이 때, $x > 3$ 이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$$\begin{aligned} & 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11 \\ & \geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11 \\ & = 2 \cdot 3 + 11 = 17 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

16. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 홀수를 포함하는 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28개

해설

전체의 부분집합에서 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다.

$\therefore 2^5 - 2^2 = 28(\text{개})$

17. 두 집합 $A = \{a-1, a+2, 4\}$, $B = \{b-3, b+1, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 5, c\}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, $c \neq 4, c \neq 5$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$A \cap B = \{4, 5, c\}$ 이므로 $\{4, 5, c\} \subset \{a-1, a+2, 4\}$, $\{4, 5, c\} \subset \{b-3, b+1, 5\}$

즉, $5 = a-1$ 또는 $5 = a+2$, $4 = b-3$ 또는 $4 = b+1$.

i) $a = 6, b = 7$ 일 때, $A = \{5, 8, 4\}$, $B = \{4, 8, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5, 8\}$

ii) $a = 6, b = 3$ 일 때, $A = \{5, 8, 4\}$, $B = \{0, 4, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5\}$

iii) $a = 3, b = 7$ 일 때, $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{4, 8, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5\}$

iv) $a = 3, b = 3$ 일 때, $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{0, 4, 5\}$ 이므로

$A \cap B = \{4, 5\}$

i)~iv)에서 문제의 조건을 만족하는 것은 i)의 경우이며 $a=6, b=7, c=8$ 이다.

따라서 $a+b+c=21$ 이다.

18. 어느 학급에서 어느 날 갑자기 교과서를 검사하였더니 영어 책을 가져온 학생이 15 명이고, 영어 책과 수학 책을 모두 가져 온 학생이 8 명, 영어 책 또는 수학 책을 가져 온 학생이 55 명이었다. 수학 책을 가져온 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ **답:** 명

▶ 정답 : 48 명

해설

영어 책을 가져 온 학생을 집합 A 라 하고, 수학 책을 가져 온 학생을 B 라고 하자.

그렇다면 영어 책과 수학 책을 모두 가져 온 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

수학 책을 가져 온 학생, 즉 $n(B)$ 를 구하는 것이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$55 = 15 + x - 8$$

그러므로 x 는 48이다.

19. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ 의
두 부분집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 3\text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 8\text{의 약수}\}$ 에 대
하여, $(B - A)^c$ 은?

① $\{1, 3\}$

② $\{1, 3, 6\}$

③ $\{1, 3, 7\}$

④ $\{1, 3, 6, 7\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 6, 7\}$

해설

$A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 $B - A = \{2, 4, 8\}$ 이다.
따라서 $(B - A)^c = \{1, 3, 6, 7\}$ 이다.

20. 자연수 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k 라 할 때, $(A_{24} \cup A_{18}) \subset A_k$ 를 만족하는 k 의 최댓값은 ?

① 2

② 3

③ 6

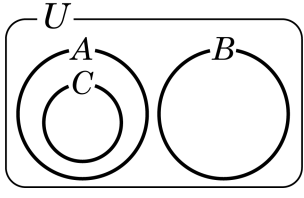
④ 9

⑤ 18

해설

$A_{18} \subset A_k$ 이고 $A_{24} \subset A_k$ 이므로 k 는 18, 24의 공약수이고, 이 중에서 최대인 것은 6이다.

21. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



- ① $A - B = B$

② $A \cup B \cup C = U$

③ $(A \cup C) \subset B$

④ $B \cap C = \emptyset$

⑤ $A^c \subset B$

해설

- ① $A - B = A$

② $A \cup B \cup C = A \cup B$

③ $(A \cup C) \not\subset B$

⑤ $B \subset A^c$

22. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자.
명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, $\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q^c$ 와 같은 것은?

① $\emptyset$ ② U ③ P ④ Q ⑤ Q^c

해설

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$$P \subset Q^c$$

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q^c$$

$$= \{P \cap (Q \cap Q^c)\} \cap Q^c$$

$$= (P \cap U) \cap Q^c$$

$$= P \cap Q^c = P$$

23. 다음 중 명제 「 $x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1, y = \frac{1}{2}$

② $x = 100, y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1, y = 1$

④ $x = 2, y = 4$

⑤ $x = -1, y = -5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

24. 두 조건 $p: 2 \leq x < 5$, $q: a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10 ② -9 ③ -6 ④ -5 ⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P , 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.

$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \geq 5$ 이므로 $a < 1$, $a \geq -4$

따라서 $-4 \leq a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 이고 합은 -10 이다.

25. 삼각형 ABC 에 대한 명제 ' $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 $\angle B = \angle C$ 이다.'의 역, 이, 대우 중 참인 명제를 모두 적은 것은?
- ① 대우 ② 역, 이 ③ 이, 대우
④ 역, 대우 ⑤ 역, 이, 대우

해설

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 $\angle B = \angle C$ 이다 : 참
그러므로 ‘대우’도 참
역 : $\angle B = \angle C$ 이면 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이다 : 참
그러므로 ‘이’도 참

26. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $\sim q \rightarrow \sim p$
- ② $p \rightarrow r$
- ③ $q \rightarrow r$
- ④ $\sim r \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim p \rightarrow \sim r$

해설

- ① 명제 $p \rightarrow q$ 참이므로 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참
- ②, ③ 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 참이므로 대우인 ③ $q \rightarrow r$ 도 참이고, $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 로부터 ② $p \rightarrow r$ 도 참이다.
- ④ $p \rightarrow r$ 이 참이므로 대우인 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
- ⑤ 명제 $p \rightarrow r$ 이 참이라고 해도 이인 $\sim p \rightarrow \sim r$ 은 반드시 참이라고는 할 수 없다.

27. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
(1), (2), (3)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

[증명]
주어진 명제의 (1)을 (를) 구하여 보면
(1) : ‘ n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.’
이 때, n 이 홀수이므로 n 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
 $n = (2)(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, n^2 의 값을 구하면
 $n^2 = (2)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$ 는 (3)이므로 n^2 은 홀수이다.
따라서 (1)가 (이) 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

- ① 역, $2k + 1, 0$ 또는 짝수
- ② 이, $2k - 1$, 홀수
- ③ 대우, $2k + 1, 0$ 또는 짝수
- ④ 대우, $2k - 1, 0$ 또는 홀수
- ⑤ 역, $2k + 1, 0$ 또는 홀수

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구하여 보면
대우 : ‘ n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.’
이 때, n 이 홀수이므로 n 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
 $n = 2k + 1(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, n^2 의 값을 구하면
 $n^2 = 2 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$ 는 0 또는 짝수이므로 n^2 은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

28. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, x, y 는 임의의 실수)

- $\textcircled{\text{㉠}}$ $p : x^2 \leq 0 \quad q : x = 0$
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $p : x^2 + y^2 = 0 \quad q : xy = 0$
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $p : a, b$ 는 유리수 $q : a + b, ab$ 는 유리수

- $\textcircled{\text{①}}$ $\textcircled{\text{㉠}}$
- $\textcircled{\text{②}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$
- $\textcircled{\text{③}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{④}}$ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$
- $\textcircled{\text{⑤}}$ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

해설

- $\textcircled{\text{㉠}}$ 필요충분조건이다. ($\because x$ 가 실수이다.)
- $\textcircled{\text{㉡}}$ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1 \therefore$ 충분조건이다
- $\textcircled{\text{㉢}}$ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$
 $\therefore$ 충분조건이다.

29. 두 조건 $p: x > a$, $q: -3 \leq x \leq 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하면?

① -4 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때,
 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \rightarrow p$,
즉, $Q \subset P$ 가 성립한다.
 $P = \{x \mid x > a\}$, $Q = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$ 이므로 $a < -3$
 $\therefore$ 정수 a 의 최댓값은 -4 이다.

30. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

- ① $A = B$
- ② $B \subset A$
- ③ $A \subset B$
- ④ $A \cap B = \emptyset$
- ⑤ $A^C = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

31. 세 조건 p, q, r 에 대하여 r 이 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① $p \rightarrow q$
- ② $r \rightarrow \sim q$
- ③ $p \rightarrow \sim r$
- ④ $q \rightarrow \sim r$
- ⑤ $\sim p \rightarrow r$

해설

$r \rightarrow \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow \sim r(T) \cdots \textcircled{1}$
 $p \rightarrow q(T) \Rightarrow \sim q \rightarrow \sim p(T) \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $r \rightarrow \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow r \rightarrow \sim p(T)$
 $\Rightarrow p \rightarrow \sim r(T)$

32. $a > b > 0$ 인 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a}{1+a}$ 와 $\frac{b}{b+1}$ 의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$
③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$
⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$
④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} &= \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)} \\ &= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0 \\ (\because a > b > 0)\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$$a > b > 0 \text{ 이면 } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{양변에 1을 더하면 } \frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

33. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : 2 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{5^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$ 이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1, 2$

n 의 갯수는 2 개이다.

34. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x > 0, y > 0$ 이므로

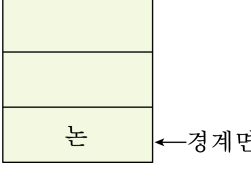
$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y} + y\right) = 16 \cdot \frac{x}{y} + 2xy + \frac{8}{xy} + \frac{y}{x} \text{ 에서}$$

$$16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 8$$

$$2xy + \frac{8}{xy} \geq 2 \cdot \sqrt{2xy \cdot \frac{8}{xy}} = 8$$

$$\therefore 16 \cdot \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy + \frac{8}{xy} \geq 16$$

35. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m²인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원
 ④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x 라 하면
 가로 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로
 총 비용은

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$

∴ 최소비용은 72만 원

36. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ 의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A 라 할 때 $n(A)$ 를 구하면?

- ㉠ $2 \in A$
- ㉡ $m, n \in A$ 이고, $mn \in U$ 이면 $mn \in A$ 이다.

- ① 6
- ② 8
- ③ 10
- ④ 12
- ⑤ 16

해설

$2 \in A$ 이고, $2 \times 2 = 2^2 \in U$ 이므로 $2^2 \in A$
 $2 \in A$, $2^2 \in A$ 이고, $2 \times 2^2 = 2^3 \in U$ 이므로 $2^3 \in A$
이와 같은 과정을 반복하면
 $2^4 \in A$, $2^5 \in A$, $2^6 \in A, \dots$
따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ 이다.

37. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.

따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

38. 집합 $A = \{1, 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^2 = 4$ (개) 이므로 $n(B) = 4$ 이다.
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^{n(B)} = 2^4 = 16$ (개)이다.

39. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 4, 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 B 는 원소 1, 4, 8을 포함하고 원소 5, 7을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8(\text{개})$ 이다 .

40. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $A^c \cap B = \emptyset$ 를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$	㉡ $A \cup B = B$	㉢ $A^c \subset B^c$
㉣ $A \cap B = B$	㉤ $A \cup B^c = U$	㉥ $A - B = \emptyset$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore B \subset A$

㉠ $A = B$ 는 $B \subset A, A \subset B$ 이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \leftrightarrow A^c \subset B^c$

㉣ $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉤ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개

41. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ① $n(\{1, 3, 5\}) - n(\{1, 5\}) = 3$
- ② $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.
- ③ $A \subset B$ 이면 $n(A) \leq n(B)$ 이다.
- ④ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
- ⑤ $n(\{x \mid x \text{는 } 10\text{의 약수}\}) = n(\{x \mid x \text{는 } 14\text{의 약수}\})$

해설

- ① $3 - 2 = 1$
- ② 예를 들어, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ 일 때,
 $n(A) = n(B) = 1$ 이지만 $A \neq B$ 이다.
- ④ 예를 들어, $A = \{0\}$, $B = \{1, 2\}$ 일 때,
 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.
- ⑤ $n(\{1, 2, 5, 10\}) = 4$, $n(\{1, 2, 7, 14\}) = 4$

42. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8개

해설

$A = \{1, 3, 5, 15\}, B = \{1, 3, 9\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 3\}$
 $A \cup B = \{1, 3, 5, 9, 15\}$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
 X 는 원소 1, 3 을 포함하는
 $\{1, 3, 5, 9, 15\}$ 의 부분집합이므로
 (집합 X 의 갯수) $= 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

43. 다음 중에서 $\{(A - B) \cup A^c\} \cap \{(A \cap B^c) \cup B\}$ 와 같은 집합이 아닌 것은?

① $(A \cup B) - (A \cap B)$

② $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$

③ $(A - B) \cup (B - A)$

④ $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$

⑤ $(A \cap B)^c \cap (A \cup B)$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A - B) \cup A^c\} \cap \{(A \cap B^c) \cup B\} \\ &= \{(A \cap B^c) \cup A^c\} \cap \{(A \cap B^c) \cup B\} \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) \\ &= (A \cap B)^c \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

44. 두 집합 $A = \{3, a+1, 9\}$, $B = \{a-1, a, a+3\}$ 에 대하여 $A-B = \{5, 9\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A-B = \{5, 9\}$ 이므로 $5 \in A$ 이다.

$$a+1=5$$

$$\therefore a=4$$

45. 다음 중에서 p 는 q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

- ① $p : a > 3, q : a^2 > 9$
- ② $p : a^2 = ab, q : a = b$
- ③ $p : |a| < |b|, q : a < b$
- ④ $p : |x - 1| = 2, q : x^2 = -2$
- ⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1, q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건

③ 아무런 조건관계가 아니다.

④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1, 3\}$, $Q = \emptyset$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.

⑤ 필요충분조건

46. 집합 P 에 대하여 $2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\emptyset \in 2^A$
- ② $\emptyset \subset 2^A$
- ③ $\{\emptyset\} \in 2^A$
- ④ $\{\emptyset\} \subset 2^A$
- ⑤ $A \in 2^A$

해설

$2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합의 집합을 의미한다.
집합 A 의 부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$ 이다.
따라서 2^A 를 원소나열법으로 나타내면 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 이다.
③ $\{\emptyset\} \notin 2^A$

47. 집합 S 의 부분집합 A, B 가 있다. $n(A \cap B) = 0$, $A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = \{b, c, d, e, f\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$A^c = \{a, c, e\}, S - B = B^c = \{b, c, d, e, f\},$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{c, e\},$$

$$n(A \cap B) = 0 \text{ 이므로}$$

$$A^c - (A \cup B)^c = B = \{a\},$$

$$B^c - (A \cup B)^c = A = \{b, d, f\},$$

$$\text{따라서 } A \cup B = \{a, b, d, f\},$$

$$\therefore n(A \cup B) = 4$$

48. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = n(C)$ 이고, $(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $n(A - C) = 0$
- ② $\frac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C)$
- ③ $n(A \cap C) = n(B)$
- ④ $\frac{n(A) + n(C)}{2} = n(B)$
- ⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \emptyset$ 이면 $A - B = \emptyset$, $B - C = \emptyset$ 이므로 $A \subset B$, $B \subset C$

또, $n(A) = n(C)$, $A \subset C$ 이므로 $A = C$

따라서 $A = B = C$

① $n(A - C) = 0 \rightarrow A = C$ 이므로 옳다.

② $\frac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C) \rightarrow 1 \times n(B) = n(C)$ 이므로 옳다.

③ $n(A \cap C) = n(B) \rightarrow$ 옳다.

④ $\frac{n(A) + n(C)}{2} = n(B) \rightarrow$ 옳다.

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C) \rightarrow n((A \cap C) - B) = 0$ 이므로 옳지 않다.

49. 학생 수가 n 명인 학급의 학생 중, 남학생의 집합을 M , 여학생의 집합을 W 라고 하고, 안경을 쓴 학생의 집합을 G , 안경을 쓰지 않은 학생의 집합을 E 라고 하고, 네 집합에 대하여 $n(M \cap G) = a$, $n(M \cap E) = b$, $n(W \cap G) = c$ 라고 한다. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \otimes B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ 이라고 정의할 때, $n((M \otimes E) \otimes (W \otimes G))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

	M	W
G	a	c
E	b	n-a-b-c

$n(M \otimes E) = a + (n - a - b - c) = n - b - c$
 $n(W \otimes G) = a + (n - a - b - c) = n - b - c$
 $n(M \otimes E) = n(W \otimes G)$ 이므로,
 $\therefore n((M \otimes E) \otimes (W \otimes G)) = 0$

50. 임의의 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + 5b \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a, b 에서 $a + b$ 의 최솟값을 구하면?

① 5

② 15

③ 25

④ 35

⑤ 45

해설

$x^2 + 2(2y + 5)x + 4y^2 + ay + 5b \geq 0$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$\frac{D}{4} = (2y + 5)^2 - (4y^2 + ay + 5b) \leq 0$$

정리하면 $(20 - a)y + 25 - 5b \leq 0 \cdots \text{㉠}$

㉠이 임의의 실수 y 에 대하여 성립하므로

$$20 - a = 0, \quad 5b - 25 \geq 0$$

$$\therefore a = 20, \quad b \geq 5$$

$$\therefore a + b \geq 25$$