1. 다음 중 주어진 조건에 의해 그 대상을 분명히 알 수 있는 것이 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 1 보다 작은 자연수의 모임

② 신기한 재주를 갖고 있는 사람들의 모임

③ 분자가 1 인 분수의 모임

④ 4 보다 작은 4 의 배수의 모임

⑤ 큰 수들의 모임

해설

② '신기한' 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.
⑤ '큰' 은 그 대상이 분명하지 않으므로 집합이 아니다.

2. 4 의 배수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $3 \in A$ ② $4 \notin A$ ③ $8 \in A$

④ $10 \in A$ ⑤ $12 \notin A$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{4, 8, 12, \cdots\}$ 이다.
따라서 $8 \in A$

3. 다음 중 옳지 <u>않게</u> 연결된 것은?

① $\{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\} = \{1, 3, 5\}$

② $\{x \mid x$는 10이하의 홀수$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

③ $\{x \mid x$는 12의 약수$\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

④ $\{x \mid x$는 20미만의 4의 배수$\} = \{4, 8, 12, 16\}$

⑤ $\{x \mid x = 2 \times n + 1,\ 1 \le n \le 3,\ n$은 자연수$\} = \{3, 5, 7\}$

해설

① $\{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다.

4. $A=\{x \mid x$는 16의 약수$\}$, $B=\{2,\ 4,\ 7,\ 9,\ 10\}$ 일 때, $n(A)+n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 10

해설

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$ 이므로 $n(A)=5$

$\therefore\ n(A)+n(B)=5+5=10$

5. 세 집합 $A=\{x|x\text{는 } 21\text{의 약수}\}$, $B=\{3,7\}$, $C=\{x|x\text{는 } 21 \text{ 이하의 자연수}\}$ 일 때, 세 집합 A, B, C 의 포함관계를 기호를 사용하여 나타낸 것으로 옳은 것을 골라라.

① $B\subset A=C$

② $B\subset C\subset A$

③ $B\subset A\subset C$

④ $A\subset B\subset C$

⑤ $A=B\subset C$

해설

$A=\{1,3,7,21\}$, $B=\{3,7\}$, $C=\{1,2,3,...,20,21\}$

$\therefore\ B\subset A\subset C$

6. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소는 포함하지 않는 부분집합을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{0\}$

▷ 정답 : $\{0,\ 1\}$

해설

집합 A 의 부분집합 중 원소 0은 반드시 포함하고 짝수인 원소 2를 포함하지 않는 부분집합을 원소의 개수별로 차례대로 구하면 $\{0\}$, $\{0, 1\}$ 이다

7. 집합 $A = \{6,\ 12,\ 18, \cdots\}$, $B = \{12,\ 24,\ 36,\ \cdots\}$ 일 때, $A \cap B$ 를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은?

① $\varnothing$

② $\{x \mid x$는 4의 배수$\}$

③ $\{x \mid x$는 8의 배수$\}$

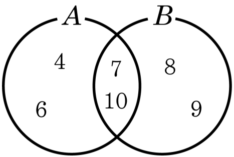
④ $\{x \mid x$는 8의 약수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 12의 배수$\}$

해설

$A \cap B$ 은 집합 A 에도 속하고 B 에도 속하는 집합을 의미한다.
$A \cap B = \{12,\ 24,\ 36,\ \cdots\}$ 이므로
조건제시법으로 고쳐보면
$A \cap B = \{x \mid x$는 12 의 배수$\}$가 된다.

8. 다음 벤 다이어그램에서 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$A \cup B$ 은 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소를 합한 집합이다. 그러므로 벤 다이어그램에서 보는 것과 같이 $A \cup B = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 이다.

$A \cup B$ 의 원소의 합은 $4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 44$

9. 집합 A 에 대하여 $\boxed{}$ 안에 공통으로 들어가는 집합을 써넣라.

(1) $A \cup \varnothing = \boxed{}$

(2) $A \cap A = \boxed{}$

(3) $A \cup A = \boxed{}$

▶ 답 :

▷ 정답 : A

해설

(1) $\varnothing$ 은 집합 A 에 포함되므로 $A \cup \varnothing = A$ 이다.

(2) $A \cap A = A$

(3) $A \cup A = A$

10. 두 집합 $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,3,8\}$ 일 때, $(A-B)\subset X$, $X-A=\varnothing$ 을 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$(A-B)\subset X\subset A$,즉 $\{5,\ 7\}\subset X\subset\{1,3,5,7\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2\times2=4$(개) 이다.

11. 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여, $(A-B)^c - B$를 간단히 한 것을 다음 중 고르면?

① $(A \cup B)^c$　② $(A \cup B)$　③ $A \cap B^c$

④ $A^c \cup B$　⑤ $A^c \cup B^c$

해설

$(A-B)^c - B = (A \cap B^c)^c \cap B^c = (A^c \cup B) \cap B^c = (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$

$= (A \cup B)^c \cup \varnothing = (A \cup B)^c$

12. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$ $\leftrightarrow$ $xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

13. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \le 0$ ② $ab \ge 0$ ③ $a+b \ge 0$

④ $ab < 0$ ⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

14. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy>0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

15. $x > 3$일 때 $\frac{3}{x-3} + 2 + 3x$의 최솟값은?

① 3 ② 5 ③ 12 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{3}{x-3} + 2 + 3x = 3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$

이 때, $x > 3$이므로 $3(x-3) > 0$, $\frac{3}{x-3} > 0$

산술평균과 기하평균에 의해

$3(x-3) + \frac{3}{x-3} + 11$

$\geq 2\sqrt{3(x-3) \cdot \frac{3}{x-3}} + 11$

$= 2 \cdot 3 + 11 = 17$

(단, 등호는 $3(x-3) = \frac{3}{x-3}$, 즉 $x = 4$일 때 성립)

따라서 최솟값은 17

16. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 적어도 하나의 홀수를 포함하는 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 28 개

해설

전체의 부분집합에서 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다.

$\therefore\ 2^5 - 2^2 = 28$(개)

17. 두 집합 $A=\{a-1,a+2,4\}, B=\{b-3,b+1,5\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{4,5,c\}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, $c\neq 4, c\neq 5$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$A\cap B=\{4,5,c\}$ 이므로 $\{4,5,c\}\subset\{a-1,a+2,4\}, \{4,5,c\}\subset\{b-3,b+1,5\}$

즉, $5=a-1$ 또는 $5=a+2$, $4=b-3$ 또는 $4=b+1$.

i) $a=6, b=7$ 일 때, $A=\{5,8,4\}, B=\{4,8,5\}$ 이므로 $A\cap B=\{4,5,8\}$

ii) $a=6, b=3$ 일 때, $A=\{5,8,4\}, B=\{0,4,5\}$ 이므로 $A\cap B=\{4,5\}$

iii) $a=3, b=7$ 일 때, $A=\{2,5,4\}, B=\{4,8,5\}$ 이므로 $A\cap B=\{4,5\}$

iv) $a=3, b=3$ 일 때, $A=\{2,5,4\}, B=\{0,4,5\}$ 이므로 $A\cap B=\{4,5\}$

i)~ iv) 에서 문제의 조건을 만족하는 것은 i) 의 경우이며 $a=6, b=7, c=8$ 이다.

따라서 $a+b+c=21$ 이다.

18. 어느 학급에서 어느 날 갑자기 교과서를 검사하였더니 영어 책을 가져 온 학생이 15 명이고, 영어 책과 수학 책을 모두 가져 온 학생이 8 명, 영어 책 또는 수학 책을 가져 온 학생이 55 명이었다. 수학 책을 가져 온 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 48 명

해설

영어 책을 가져 온 학생을 집합 A 라 하고, 수학 책을 가져 온 학생을 B라고 하자.

그렇다면 영어 책과 수학 책을 모두 가져 온 학생은 $A \cap B$ 가 된다.

수학 책을 가져 온 학생, 즉 $n(B)$ 를 구하는 것이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$55 = 15 + x - 8$

그러므로 x는 48이다.

19. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 의
두 부분집합 $A=\{x\,|\,x$는 3의 약수$\}$, $B=\{x\,|\,x$는 8의 약수$\}$ 에 대하여, $(B-A)^c$ 은?

① $\{1,3\}$　　② $\{1,3,6\}$　　③ $\{1,3,7\}$

④ $\{1,3,6,7\}$　　⑤ $\{1,3,5,6,7\}$

해설

$A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ 이므로 $B-A=\{2,\ 4,\ 8\}$ 이다.
따라서 $(B-A)^c=\{1,\ 3,\ 6,\ 7\}$ 이다.

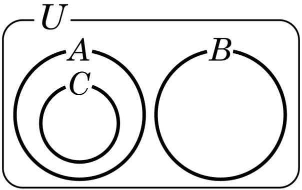
20. 자연수 k의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라 할 때, $(A_{24} \cup A_{18}) \subset A_k$를 만족하는 k의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 18

해설

$A_{18} \subset A_k$이고 $A_{24} \subset A_k$이므로 k는 18, 24의 공약수이고, 이 중에서 최대인 것은 6이다.

21. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $A-B=B$ ② $A\cup B\cup C=U$

③ $(A\cup C)\subset B$ ④ $B\cap C=\varnothing$

⑤ $A^c\subset B$

해설

① $A-B=A$

② $A\cup B\cup C=A\cup B$

③ $(A\cup C)\not\subset B$

⑤ $B\subset A^c$

22. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참일 때, $\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q^c$ 와 같은 것은?

① $\varnothing$ ② U ③ P ④ Q ⑤ Q^c

해설

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로

$P \subset Q^c$

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q^c$

$= \{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q^c$

$= (P \cap U) \cap Q^c$

$= P \cap Q^c = P$

23. 다음 중 명제「$x + y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.」가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$

② $x = 100,\ y = \frac{1}{2}$

③ $x = 1,\ y = 1$

④ $x = 2,\ y = 4$

⑤ $x = -1,\ y = -5$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것을 고르면 된다.
따라서 ②가 올바른 반례이다

24. 두 조건 $p : 2 \leq x < 5$, $q : a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10　② -9　③ -6　④ -5　⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P, 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.

$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \geq 5$ 이므로 $a < 1$, $a \geq -4$

따라서 $-4 \leq a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 -4, -3, -2, -1, 0 이고 합은 -10 이다.

25. 삼각형 ABC 에 대한 명제 '$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면$\angle B = \angle C$ 이다.'의 역, 이, 대우 중 참인 명제를 <u>모두</u> 적은 것은?

① 대우 ② 역, 이 ③ 이, 대우

④ 역, 대우 ⑤ 역, 이, 대우

해설

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 $\angle B = \angle C$ 이다 : 참

그러므로 "'대우' 도 참

역 : $\angle B = \angle C$ 이면 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이다 : 참

그러므로 '이' 도 참

26. 두 명제 $p \to q$와 $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $\sim q \to \sim p$　　② $p \to r$　　③ $q \to r$

④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim p \to \sim r$

해설

① 명제 $p \to q$ 참이므로 대우인 $\sim q \to \sim p$도 참

②, ③ 명제 $\sim r \to \sim q$ 참이므로 대우인 ③ $q \to r$도 참이고,$p \to q$와 $q \to r$로부터 ② $p \to r$도 참이다.

④ $p \to r$이 참이므로 대우인$\sim r \to \sim p$ 도 참이다.

⑤ 명제$p \to r$이 참이라고 해도 이인$\sim p \to \sim r$은 반드시 참이라고는 할 수 없다.

27. 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다. (1), (2), (3)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

> [증명]
> 주어진 명제의 (1)을(를) 구하여 보면
> (1) : 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
> 이 때, n이 홀수이므로 n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
> $n =$ (2)(k는 0 또는 자연수)
> 이 때, n^2의 값을 구하면
> $n^2 = (2)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
> 여기서 $2(k^2 + 2k)$는 (3)이므로 n^2은 홀수이다.
> 따라서 (1)가(이) 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

① 역, $2k+1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k-1$, 홀수
③ 대우, $2k+1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k-1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k+1$, 0 또는 홀수

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구하여 보면
대우 : 'n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'
이 때, n이 홀수이므로 n을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$n = 2k + 1$(k는 0 또는 자연수)
이 때, n^2의 값을 구하면
$n^2 = 2 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$는 0 또는 짝수이므로 n^2은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

28. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은? (단, x, y는 임의의 실수)

㉠ $p : x^2 \le 0 \; q : x = 0$
㉡ $p : x^2 + y^2 = 0 \; q : xy = 0$
㉢ $p : a, b$는 유리수 $q : a + b, ab$는유리수

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 필요충분조건이다. ($\because$ x 가 실수이다.)
㉡ $q \Rightarrow p$ (반례) : $x = 0, y = 1$ $\therefore$ 충분조건이다
㉢ $q \Rightarrow p$ (반례) : $a = 1 + \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$
$\therefore$ 충분조건이다.

29. 두 조건 $p : x > a$, $q : -3 \leq x \leq 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하면?

① -4　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때,
p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \to p$,
즉, $Q \subset P$ 가 성립한다.
$P = \{x \mid x > a\}$, $Q = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$ 이므로 $a < -3$
$\therefore$ 정수 a 의 최댓값은 -4 이다.

30. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B) \cup (B-A) = U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A = B$ ② $B \subset A$ ③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \varnothing$ ⑤ $A^C = B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

31. 세 조건 p, q, r 에 대하여 r 이 $\sim q$ 이기 위한 충분조건, q 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 반드시 참 이라고 할 수 없는 것은?

① $p \rightarrow q$ ② $r \rightarrow \ \sim q$ ③ $p \rightarrow \ \sim r$

④ $q \rightarrow \ \sim r$ ⑤ $\sim p \rightarrow r$

해설

$r \rightarrow \ \sim q(T) \Rightarrow q \rightarrow \ \sim r(T) \cdots$ ㉠

$p \rightarrow q(T) \Rightarrow \ \sim q \rightarrow \ \sim p(T) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $r \rightarrow \ \sim q \rightarrow \ \sim p \Rightarrow r \rightarrow \ \sim p(T)$

$\Rightarrow p \rightarrow \ \sim r(T)$

32. $a > b > 0$인 실수 a, b에 대하여 $\frac{a}{1+a}$와 $\frac{b}{b+1}$의 대소 관계는?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$ ② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$

③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$ ④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

해설

$$\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a+ab-b-ab}{(1+a)(1+b)}$$

$$= \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$

$(\because a > b > 0)$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

해설

$a > b > 0$이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

양변에 1을 더하면 $\frac{1+a}{a} < \frac{1+b}{b}$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

33. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ **답 :** ____개

▷ **정답 :** 2개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2개이다.

34. $x>0,\ y>0$일 때, $\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y}+y\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$x>0,\ y>0$이므로

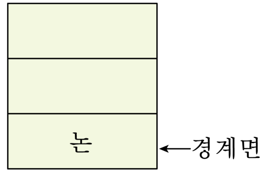
$\left(2x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8}{y}+y\right)=16\cdot\frac{x}{y}+2xy+\frac{8}{xy}+\frac{y}{x}$에서

$16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\cdot\sqrt{16\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=8$

$2xy+\frac{8}{xy}\geq 2\cdot\sqrt{2xy\cdot\frac{8}{xy}}=8$

$\therefore 16\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2xy+\frac{8}{xy}\geq 16$

35. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 $27\mathrm{m}^2$ 인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원

④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x라 하면

가로의 길이는 $\dfrac{27}{x}$ m이므로

총 비용은

$$3\times 2x + 3\times\frac{27}{x}\times 2 + \frac{27}{x}\times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x\cdot\frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2\times 36 = 72$$

$\therefore$ 최소비용은 72만 원

36. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,\cdots,100\}$의 부분집합 중에서 다음의 두 조건을 만족하고, 원소의 개수가 가장 적은 집합을 A라 할 때 $n(A)$를 구하면?

㉠ $2\in A$

㉡ $m,\ n\in A$ 이고, $mn\in U$ 이면 $mn\in A$ 이다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 16

해설

$2\in A$ 이고, $2\times 2=2^2\in U$ 이므로 $2^2\in A$

$2\in A,\ 2^2\in A$ 이고, $2\times 2^2=2^3\in U$ 이므로 $2^3\in A$

이와 같은 과정을 반복하면

$2^4\in A,\ 2^5\in A,\ 2^6\in A,\cdots$

따라서 집합 A 는 전체집합 U 의 원소 중 2의 거듭제곱을 반드시 포함해야 한다. 즉, 집합 A 의 원소의 개수가 가장 적을 때는 2의 거듭제곱만을 원소로 가질 때이므로 구하는 집합은 $\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$ 이다.

37. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7\}\}$, $B = \{0,\ \varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

38. 집합 $A = \{1,\ 2\}$ 에 대하여 집합 B 는 집합 A 의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 16 개

해설

집합 A 의 부분집합의 개수는
$2^2 = 4$ (개) 이므로 $n(B) = 4$ 이다.
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는
$2^{n(B)} = 2^4 = 16$ (개) 이다.

39. 전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A = \{1,\ 4,\ 5,\ 7, 8\}$, $A \cap B = \{1,\ 4,\ 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

집합 B 는 원소 1, 4, 8을 포함하고 원소 5, 7 을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8$(개) 이다 .

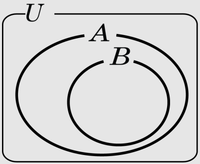
40. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $A^c \cap B = \varnothing$를 만족할 때, 다음 중에서 항상 성립하는 것의 개수는?

㉠ $A = B$	㉡ $A \cup B = B$	㉢ $A^c \subset B^c$
㉣ $A \cap B = B$	㉤ $A \cup B^c = U$	㉥ $A - B = \varnothing$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$A^c \cap B = B - A = \varnothing$이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $\therefore\ B \subset A$



㉠ $A = B$는 $B \subset A$, $A \subset B$이므로 항상 성립하지 않는다.

㉢ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A^c \subset B^c$

㉣ $B \subset A \quad \leftrightarrow \quad A \cap B = B$ 이므로 성립한다.

㉤ 위의 그림에서 $A \cup B^c = U$ 이다.

$\therefore$ 3개

41. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $n(\{1,\ 3,\ 5\}) - n(\{1,\ 5\}) = 3$

② $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

③ $A \subset B$ 이면 $n(A) \leq n(B)$ 이다.

④ $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

⑤ $n(\{x \mid x$는 10의 약수$\}) = n(\{x \mid x$는 14의 약수$\})$

해설

① $3 - 2 = 1$

② 예를 들어, $A = \{0\},\ B = \{1\}$ 일 때,
$n(A) = n(B) = 1$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

④ 예를 들어, $A = \{0\},\ B = \{1,\ 2\}$ 일 때,
$n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.

⑤ $n(\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}) = 4,\ n(\{1,\ 2,\ 7,\ 14\}) = 4$

42. 집합 $A=\{x|x$는 15의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 9의 약수$\}$ 에 대하여 $(A\cup B)\cap X=X$, $(A\cap B)\cup X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$A=\{1,3,5,15\}$, $B=\{1,3,9\}$이므로
$A\cap B=\{1,3\}$
$A\cup B=\{1,3,5,9,15\}$
$(A\cup B)\cap X=X$ 이므로 $X\subset(A\cup B)$
$(A\cap B)\cup X=X$ 이므로 $(A\cap B)\subset X$
$\therefore (A\cap B)\subset X\subset(A\cup B)$
X 는 원소 1, 3 을 포함하는
$\{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15\}$ 의 부분집합이므로
(집합 X의 갯수) $=2^{5-2}=2^3=8$(개)

43. 다음 중에서 $\{(A-B)\cup A^c\}\cap\{(A\cap B^c)\cup B\}$와 같은 집합이 <u>아닌</u> 것은?

① $(A\cup B)-(A\cap B)$ ② $(A\cup B)\cap(A^c\cup \beta^c)$

③ $(A-B)\cup(B-A)$ ④ $(A\cup B^c)\cap(A^c\cup B)$

⑤ $(A\cap B)^c\cap(A\cup B)$

해설

$$
\begin{aligned}
&\{(A-B)\cup A^c\}\cap\{(A\cap B^c)\cup B\}\\
&=\{(A\cap B^c)\cup A^c\}\cap\{(A\cap B^c)\cup B\}\\
&=(A^c\cup B^c)\cap(A\cup B)\\
&=(A\cap B)^c\cap(A\cup B)\\
&=(A\cup B)-(A\cap B)\\
&=(A-B)\cup(B-A)
\end{aligned}
$$

44. 두 집합 $A=\{3, a+1, 9\}$, $B=\{a-1, a, a+3\}$에 대하여 $A-B=\{5, 9\}$일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A-B=\{5, 9\}$이므로 $5 \in A$이다.

$a+1=5$

$\therefore \ a=4$

45. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건
③ 아무런 조건관계가 아니다.
④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
⑤ 필요충분조건

46. 집합 P 에 대하여 $2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 로 정의한다. $A = \{1, 2, 4\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\varnothing \in 2^A$ ② $\varnothing \subset 2^A$ ③ $\{\varnothing\} \in 2^A$

④ $\{\varnothing\} \subset 2^A$ ⑤ $A \in 2^A$

해설

$2^A = \{P \mid P \subset A\}$ 는 집합 A 의 부분집합의 집합을 의미한다. 집합 A 의 부분집합은 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}$ 이다.

따라서 2^A 를 원소나열법으로 나타내면 $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$ 이다.

③ $\{\varnothing\} \notin 2^A$

47. 집합 S 의 부분집합 A, B 가 있다. $n(A \cap B) = 0$, $A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = \{b, c, d, e, f\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$A^c = \{a, c, e\}$, $S - B = B^c = \{b, c, d, e, f\}$,

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{c, e\}$,

$n(A \cap B) = 0$ 이므로

$A^c - (A \cup B)^c = B = \{a\}$,

$B^c - (A \cup B)^c = A = \{b, d, f\}$,

따라서 $A \cup B = \{a, b, d, f\}$,

$\therefore n(A \cup B) = 4$

48. 전체집합 U 의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = n(C)$ 이고, $(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $n(A - C) = 0$

② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C)$

③ $n(A \cap C) = n(B)$

④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B)$

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C)$

해설

$(A \cap B^c) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$ 이면 $A - B = \varnothing,\ B - C = \varnothing$ 이므로

$A \subset B,\ B \subset C$

또, $n(A) = n(C)$, $A \subset C$ 이므로 $A = C$

따라서 $A = B = C$

① $n(A - C) = 0 \to A = C$ 이므로 옳다.

② $\dfrac{n(C)}{n(A)} \times n(B) = n(C) \to 1 \times n(B) = n(C)$ 이므로 옳다.

③ $n(A \cap C) = n(B) \to$ 옳다.

④ $\dfrac{n(A) + n(C)}{2} = n(B) \to$ 옳다.

⑤ $n((A \cap C) - B) = n(A \cup B \cup C) \to n((A \cap C) - B) = 0$ 이므로 옳지 않다.

49. 학생 수가 n 명인 학급의 학생 중, 남학생의 집합을 M , 여학생의 집합을 W 라고 하고, 안경을 쓴 학생의 집합을 G , 안경을 쓰지 않은 학생의 집합을 E 라고 하고, 네 집합에 대하여 $n(M\cap G) = a$, $n(M\cap E) = b$, $n(W\cap G) = c$ 라고 한다. 두 집합 A, B 에 대하여 $A\circledcirc B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ 이라고 정의할 때, $n((M\circledcirc E)\circledcirc(W\circledcirc G))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

	M	W
G	a	c
E	b	n−a−b−c

$n(M\circledcirc E) = a + (n-a-b-c) = n-b-c$

$n(W\circledcirc G) = a + (n-a-b-c) = n-b-c$

$n(M\circledcirc E) = n(W\circledcirc G)$ 이므로,

$\therefore n((M\circledcirc E)\circledcirc(W\circledcirc G)) = 0$

50. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+5b \geq 0$ 이 성립하기 위한 상수 a, b에서 $a+b$의 최솟값을 구하면?

① 5　② 15　③ 25　④ 35　⑤ 45

해설

$x^2+2(2y+5)x+4y^2+ay+5b \geq 0$이 임의의 실수 x에 대하여 성립하므로

$$\frac{D}{4}=(2y+5)^2-(4y^2+ay+5b) \leq 0$$

정리하면 $(20-a)y+25-5b \leq 0 \cdots$ ㉠

㉠이 임의의 실수 y 에 대하여 성립하므로

$20-a=0,\ 5b-25 \geq 0$

$\therefore\ a=20,\ b \geq 5$

$\therefore\ a+b \geq 25$